

4. Feladatsor

Sorozatok - Megoldások

1. Feladat: A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ sorozat 1-hez konvergál, azaz minden pozitív ϵ -hoz adjunk meg egy n_0 küszöbszámot. Hányadik elemtől (n_1) kezdve esnek a sorozat elemei az $r = 10^{-2}$ sugarú teljes környezetébe?

Megoldás:

A definíció: minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik egy n_0 küszöbszám, hogy minden $n > n_0$ esetén $|a_n - a| < \epsilon$.

$|\frac{2n-1}{2n+1} - 1| = |\frac{-2}{2n+1}| < \epsilon$, mivel $n > 0$, ezért $|\frac{-2}{2n+1}| = \frac{2}{2n+1} \rightarrow 2 <$

$\epsilon \cdot (2n+1) \rightarrow \frac{2}{\epsilon} < 2n+1 \rightarrow \boxed{\frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{2} < n}$ (ez megadja minden ϵ esetén a küszöbszámot)

Ha $\epsilon = 10^{-2}$, akkor $n_0 = \frac{2}{10^{-2}} - \frac{1}{2} = 99.5$, tehát $n = 100$ -tól az a_n elemei mind a határérték ϵ sugarú környezetébe esnek.

2. Feladat: Vizsgáljuk meg az alábbi valós számsorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. Adjuk meg - ha léteznek - a sorozatok határértékét, infimumát és szuprémumát.

$$a_n = \frac{2n-1}{3n+1} \qquad b_n = \frac{n^2+1}{n(n+1)}$$

Megoldás:

a) $a_{n+1} = \frac{2n+1}{3n+4} > \frac{2n-1}{3n+1} = a_n$. Ha átszorozunk mindkét oldal nevezőjével, a következőt kapjuk:

$$(2n+1)(3n+1) = 6n^2 + 5n + 1 > 6n^2 + 5n - 4 = (2n-1)(3n+4).$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}^+$ -re teljesül, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő. Mivel konvergens, ezért a sup a határérték, az inf a sorozat első (legkisebb) eleme.

$$\sup(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} = \frac{2}{3}; \quad \inf(a_n) = a_1 = \frac{1}{4}$$

b)

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)} = \begin{cases} > 0, & \text{ha } n > 2; \\ = 0, & \text{ha } n = 2; \\ < 0, & \text{ha } n < 2. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy $a_1 > a_2 = a_3$, és a harmadik elemtől a sorozat kezdve szigorúan monoton nő.

$$\sup(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1; \quad \inf(a_n) = a_2 = a_3 = \frac{5}{6}$$

3. Feladat: Döntsük el, hogy az alábbi valós számsorozatok konvergensek vagy divergensek. Ha konvergensek, akkor határozzuk meg a határértéküket; ha divergensek, akkor nézzük meg, divergálnak-e végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez.

$$a) a_n = \left(\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}} \right)^n$$

$$b) a_n = \frac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}}$$

$$c) a_n = \frac{1000n^3 + 20n^2}{0.001n^4 + 100n^2}$$

$$d) a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^5$$

$$e) a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 1}}{n + 1}$$

Megoldás:

a) 1. megoldás: Tudjuk, hogy q^n akkor lesz konvergens, ha $|q| < 1$, különben divergens. Ezért csak a törtet vizsgáljuk meg:

$\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$, és mivel $n > 0$, ezért $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, tehát a tört értéke nagyobb lesz, mint 1 $\implies$ az a_n sorozat divergens és tart a ∞ -hez. Mivel a sorozat szig. mon. növekvő, ezért nem lesz torlódási helye sem.

2. megoldás: Bernoulli-egyenlőtlenség alapján: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \sqrt{n}$. Mivel már a jobb oldal is a ∞ -hez tart, ezért az ennél nagyobb sorozat is.

b) $\frac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}} = \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{4}2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (mivel a nevező tart a ∞ -hez, ezért a tört a 0-hoz tart)

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000}{n} + \frac{20}{n^2}}{0.001 + \frac{100}{n^2}} = 0$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \right)^5 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \right)^5 = \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 1}}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt[3]{1+0+0}}{1+0} = 1$$

4. Feladat: Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

$$a_n = \left(\frac{n-1}{3n} \right)^{2n+1}$$

$$b_n = \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 - n + 4} \right)^{3n^2 - 6n + 5} \cdot \frac{\sqrt{n^4 - n^2 + 6} - \sqrt{2n^3 + n - 1}}{n^2 + 1}$$

Megoldás:

a) Bontsuk szét a törtet úgy, hogy megjelenjen a nevezetes e határértékhez szükséges $(1 + \frac{k}{n})$ alak:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^1 \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^{2n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^1 \left(\left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^n\right)^2 = 0 \cdot 1 \cdot (e^{-1})^2 = 0\end{aligned}$$

b) Bontsuk a sorozatot két tényező szorzatára: $b_n = u_n \cdot v_n$, ahol

$$u_n = \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 - n + 4}\right)^{3n^2 - 6n + 5}, \quad v_n = \frac{\sqrt{n^4 - n^2 + 6} - \sqrt{2n^3 + n - 1}}{n^2 + 1}.$$

Az u_n tényező határértéke (1^∞ típus)

Alakítsuk át az alapot és bővítsük a kitevőt az e alapú határértékhez:

$$u_n = \left(1 + \frac{-3}{n^2 - n + 4}\right)^{3n^2 - 6n + 5} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 - n + 4}{-3}}\right)^{\frac{n^2 - n + 4}{-3}}\right]^{\frac{-3(3n^2 - 6n + 5)}{n^2 - n + 4}}.$$

Mivel a belső zárójel tart az e számhoz, és a külső kitevő határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3(3n^2 - 6n + 5)}{n^2 - n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9n^2 + 18n - 15}{n^2 - n + 4} = -9,$$

ezért:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{-9}.$$

A v_n tényező határértéke

Emeljünk ki n^2 -et a számlálóból és a nevezőből:

$$v_n = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{6}{n^4}} - \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

A nullához tartó tagok elhagyásával:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{\sqrt{1 - 0 + 0} - \sqrt{0 + 0 - 0}}{1 + 0} = 1.$$

A határérték

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = e^{-9} \cdot 1 = e^{-9} = \frac{1}{e^9}.$$