

4. Feladatsor

Térgeometria, sorozatok - Megoldások

1. Feladat: Írjuk fel az alábbiak alapján meghatározott egyenesek paraméteres és paramétermentes egyenletrendszeit!
- a) Átmegy a $P(3,1,2)$ és a $Q(-1,1,3)$ pontokon.
- b) Merőleges az $a = [-2,3,1]$ és a $b = [2,0,1]$ vektorokra, és átmegy az $A(6,-3,4)$ ponton.
- c) Párhuzamos a $3x + y - z + 1 = 0$ és az $x + y + z = 0$ egyenletű síkkal, és metszi az yz tengelysíkot a $P(0,4,1)$ pontban.

Megoldás:

- a) Az egyenes irányvektorának vehetjük a P-ből Q-ba mutató vektort (ez párhuzamos lesz az egyenessel), amit egyszerűen fel tudunk írni úgy, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit:

$$\overrightarrow{PQ} = (-1 - 3, 1 - 1, 3 - 2) = (-4, 0, 1).$$

Válasszunk egyet P és Q közül, és segítségével írjuk fel az egyenletrendszert (itt P-t választottuk):

$$x = 3 - 4t; y = 1; z = 2 + t \quad (t \in R), \text{ nparaméteresen: } \frac{x-3}{-4} = \frac{z-2}{1}; y = 1$$

- b) Merőleges a két vektorra $\longleftrightarrow$ az egyenes irányvektora a két vektor vektoriális szorzata $\longrightarrow \underline{v} = (3, 4, -6)$, ebből az egyenletrendszerek:

$$x = 6 + 3t; y = -3 + 4t; z = 4 - 6t \quad (t \in R),$$

nparaméteresen: $\frac{x-6}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{4-z}{6}$

- c) Az irányvektor a két sík normálvektorainak vektoriális szorzata $\longrightarrow \underline{v} = (3, 1, -1) \times (1, 1, 1) = (2, -4, 2)$, ebből az egyenletrendszerek:

$$x = 2t; y = 4 - 4t; z = 1 + 2t \quad (t \in R),$$

nparaméteresen: $\frac{x-0}{2} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-1}{2}$

2. Feladat: Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(1,5,2)$ ponton és párhuzamos a $7x - y + 3z + 2 = 0$ egyenletű síkkal!

Megoldás:

Párhuzamos a síkkal $\longleftrightarrow$ ugyanaz a normálvektoruk: $\underline{n} = (7, -1, 3)$

A sík egyenlete: $7(x-1) - 1(y-5) + 3(z-2) = 0 \longleftrightarrow 7x - y + 3z - 8 = 0$

3. Feladat: Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az $x - y - 4z - 5 = 0$ és a $2x + y - 2z - 4 = 0$ egyenletű síkok metszésvonalával és átmegy az origón!

Megoldás:

A metszésvonalukkal párhuzamos, azaz mind a kettő síkkal párhuzamos $\rightarrow$ az irányvektora a két sík normálvektorának vektoriális szorzata:

$$\underline{v} = (1, -1, -4) \times (2, 1, -2) = (6, -6, 3)$$

$$\rightarrow x = 6t; y = -6t; z = 3t \quad (t \in \mathbb{R}); \frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{-6} = \frac{z-0}{3}$$

4. Feladat: Tükrözzük az $x = 1 - 2t, y = 3 + 2t, z = -4 - 9t$ egyenletrendszerű e egyenest a $3x + y - 2z = 0$ egyenletű síkon!

Megoldás:

Az egyenes tükröképének felírásához kell egy irányvektor (ami az eredeti irányvektor tükröképe a síkra) és egy pont. Az utóbbi lehet a sík és az egyenes metszéspontja (ha van, mert annak tükröképe önmaga), vagy egy random pontot is tükrözhetünk - mi az utóbbit fogjuk most használni.

Az eredeti egyenes egy pontja $P = (1, 3, -4)$, irányvektora $\underline{v} = (-2, 2, -9)$, a sík normálvektora $\underline{n} = (3, 1, -2)$.

Irányvektor tükrözése a síkra: $\underline{v}' = \underline{v} - 2 \cdot \frac{\underline{v} \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|^2} \cdot \underline{n} = (-8, 0, -5)$

Pont tükrözése: $P' = P - 2 \cdot \frac{3x_0 + y_0 - 2z_0}{|\underline{n}|^2} \cdot \underline{n} = (-5, 1, 0) \rightarrow$

A tükrözött egyenes: $x = -5 - 8t; y = 1; z = -5t$.

5. Feladat: A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az a_n sorozat a -hoz konvergál, azaz minden pozitív ϵ -hoz adjunk meg egy n_0 küszöbszámot. Hányadik elemtől (n_1) kezdve esnek a sorozat elemei az a szám r sugarú teljes környezetébe?

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+1}, \quad a = 1, \quad r = 10^{-2}$$

Megoldás:

A definíció: minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik egy n_0 küszöbszám, hogy minden $n > n_0$ esetén $|a_n - a| < \epsilon$.

$$\left| \frac{2n-1}{2n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{2n+1} \right| < \epsilon, \quad \text{mivel } n > 0, \text{ ezért } \left| \frac{-2}{2n+1} \right| = \frac{2}{2n+1} \rightarrow 2 <$$

$$\epsilon \cdot (2n+1) \rightarrow \frac{2}{\epsilon} < 2n+1 \rightarrow \boxed{\frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{2} < n} \quad (\text{ez megadja minden } \epsilon \text{ esetén a küszöbszámot})$$

Ha $\epsilon = 10^{-2}$, akkor $n_0 = \frac{2}{10^{-2}} - \frac{1}{2} = 99.5$, tehát $n = 100$ -tól az a_n elemei mind a határérték ϵ sugarú környezetébe esnek.

6. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozat a végtelenhez divergál. Milyen n_1 indextől kezdve lesznek a sorozat elemei nagyobbak az adott k pozitív számnál?

$$a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1}, \quad k = 10$$

Megoldás:

$a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} \cdot \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}-1} = \frac{(n-1)(\sqrt{n}-1)}{n-1} = \sqrt{n} - 1$, mivel a $\sqrt{x}$ egy szigorúan monoton növekvő függvény, ezért ha $n \rightarrow \infty$ akkor $a_n \rightarrow \infty$, tehát divergens a függvény.

$\sqrt{n} - 1 > k = 10 \rightarrow \sqrt{n} > 11 \rightarrow n > 121$. Tehát $n_1 = 122$ indextől kezdve lesznek a sorozat elemei nagyobbak a $k = 10$ -nél.