3. Feladatsor

Vektorok - Megoldások

1. Feladat: Oldjuk meg a következő egyenleteket és adjuk meg a megoldást algebrai alakban!

$$a)\ 2z^2 = \overline{z}, \qquad b)\ |z| + z = 5 - i \qquad c)\ iz^2 + (2-4i)z - 4 - i = 0$$
$$d) z^2 - (4-2i)z + 4 - 4i = 0$$

Megoldás:

a) $z = a + bi \longrightarrow 2z^2 = 2(a+bi)^2 = a - bi \rightarrow 2(a^2 + 2abi - b^2) = a - bi$

Felbontjuk valós és képzetes részre:
- valós: $2a^2 - 2b^2 = a$
- képzetes: $4abi = -bi$

$b(4a+1) = 0 \longrightarrow b = 0 \quad$ vagy $\quad a = -\frac{1}{4}$

1. eset $(b = 0)$: $2a^2 - a = 0 \longrightarrow a(2a-1) = 0 \longrightarrow z_1 = 0; \quad z_2 = \frac{1}{2}$

2. eset $(a = -\frac{1}{4})$: $2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 2b^2 = -\frac{1}{4} \longrightarrow 2b^2 = \frac{3}{8} \longrightarrow b^2 = \frac{3}{16} \longrightarrow$
$b = \pm\frac{\sqrt{3}}{4} \longrightarrow z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i; \quad z_4 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

b) $z = a + bi \longrightarrow \sqrt{a^2+b^2} + a + bi = 5 - i$

Felbontjuk valós és képzetes részre:
- képzetes: $bi = -i \longrightarrow b = -1$
- valós: $\sqrt{a^2 + (-1)^2} + a = 5 \longrightarrow \sqrt{a^2+1} = 5 - a$

Négyzetre emelve $(5 - a \geq 0 \longrightarrow a \leq 5)$: $a^2 + 1 = (5-a)^2 = 25 - 10a +$
$a^2 \longrightarrow 1 = 25 - 10a \longrightarrow 10a = 24 \longrightarrow a = \frac{12}{5}$

$z = \frac{12}{5} - i$

c) $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2-4i) \pm \sqrt{(2-4i)^2 - 4 \cdot i \cdot (-4-i)}}{2i} =$

$$\frac{-2+4i \pm \sqrt{(4-16i-16)-(-16i+4)}}{2i} = \frac{-2+4i \pm \sqrt{-12-16i+16i-4}}{2i} =$$
$$\frac{-2+4i \pm \sqrt{-16}}{2i} = \frac{-2+4i \pm 4i}{2i} \longrightarrow z_1 = \frac{-2+4i+4i}{2i} = \frac{-2+8i}{2i} =$$
$$\frac{-1+4i}{i} = 4+i;\ z_2 = \frac{-2+4i-4i}{2i} = \frac{-2}{2i} = -\frac{1}{i} = i$$

d) $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-(4-2i)) \pm \sqrt{(-(4-2i))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4-4i)}}{2 \cdot 1} =$
$$\frac{4-2i \pm \sqrt{(16-16i-4)-(16-16i)}}{2} = \frac{4-2i \pm \sqrt{12-16i-16+16i}}{2} =$$
$$\frac{4-2i \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4-2i \pm 2i}{2} \longrightarrow z_1 = \frac{4-2i+2i}{2} = \frac{4}{2} = 2;$$
$$z_2 = \frac{4-2i-2i}{2} = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$$

2. Feladat: Legyen az {a, b, c} vektorrendszer lineárisan független. Döntsük el, hogy az {r, s, t} vektorrendszer lineárisan független-e! Állításainkat igazoljuk!

$$\begin{array}{llll} a) & r = 3a+2b+c & s = 5a–3b-2c & t = 0, \\ b) & r = 3a-b-c & s = 2a+b+2c & t = a-2b-3c, \\ c) & r = a+b+c & s = -a+c & t = a-b+c, \end{array}$$

Megoldás:
a) A vektorrendszer nem lineárisan független, mivel $t = 0$ (a zéróvektor), a három vektor között azonnal fennáll egy nemtriviális lineáris kombináció:

$$0 \cdot r + 0 \cdot s + 1 \cdot t = 0.$$

Ez nem a triviális ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) megoldás, tehát a $\{r, s, t\}$ vektorrendszer lineárisan függő.

b) A vektorrendszer lineárisan függő, mivel $t = r - s$.

c) A vektorrendszer lineárisan független, mivel ha

$$\alpha r + \beta s + \gamma t = 0,$$

akkor

$$\alpha(a+b+c)+\beta(-a+c)+\gamma(a-b+c) = (\alpha-\beta+\gamma)a+(\alpha-\gamma)b+(\alpha+\beta+\gamma)c = 0.$$

Mivel a, b, c függetlenek, ezért

$$\alpha - \beta + \gamma = 0, \quad \alpha - \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Egyenletrendszer megoldása $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tehát csak a triviális kombináció adja a nullvektort.

3. Feladat: Az a és b vektorok szöge $\frac{\pi}{3}$, abszolút értékük: $|a| = 3$ és $|b| = 4$. Számítsuk ki az alábbi skaláris szorzatok értékét!

$$a)\ ab \qquad b)\ a^2 \qquad c)\ (a+b)^2 \qquad d)\ (3a-2b)^2$$

Megoldás:

a) $ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos szög_{ab} = 3 \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$

b) $a^2 = |a| \cdot |a| \cdot \cos szög_{aa} = 3 \cdot 3 \cdot \cos 0 = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$

c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 9 + 2 \cdot 6 + |b| \cdot |b| \cdot \cos 0 = 9 + 12 + 4 \cdot 4 \cdot 1 = 37$
Azért bonthattuk így ki a négyzetre emelt összeget, mivel a skaláris szorzás kommutatív és a vektorösszeadásra nézve disztributív.

d) $(3a-2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2 = 9 \cdot 9 - 12 \cdot 6 + 4 \cdot 16 = 73$

4. Feladat: Az a, b, c vektorrendszer az α paraméter mely értékeinél lineárisan független, és mely értékeinél lineárisan függő?

$$a)\ a = [\alpha, 1, 2], b = [3, -1, 0], c = [2, 1, 0]$$
$$b)\ a = [3, \alpha, 0], b = [0, 3, \alpha], c = [1, 0, -1]$$

Megoldás:
Akkor lesz lineárisan függő a vektorrendszer, ha a 3 vektor vegyes szorzata 0 (ugyanis ez azt jelenti, hogy egy síkba esnek).

a) A vegyes szorzat kiszámításánál kiesik az α-t tartalmazó tag, és mivel a vegyes szorzat értéke $10 \neq 0$, ezért minden α-ra független lesz a vektorrendszer. Kifejtve:

$$(a \times b) \cdot c = \det \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) = 2 \cdot (3+2) = 10 \neq 0.$$

b) Ha $\alpha = -3$ vagy $\alpha = 3$, akkor a vegyes szorzat értéke 0, ezért függő lesz a vektorrendszer, minden más α-ra független. Kifejtve:

$$(a \times b) \cdot c = \det \begin{bmatrix} 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & \alpha \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Fejtsük ki a determinánst az első sor szerint:

$$\begin{aligned} \det &= 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 3 \cdot \big(3 \cdot (-1) - \alpha \cdot 0\big) - \alpha \cdot \big(0 \cdot (-1) - \alpha \cdot 1\big) + 0 \\ &= 3 \cdot (-3) - \alpha \cdot (-\alpha) = -9 + \alpha^2 = \alpha^2 - 9. \end{aligned}$$

A vektorrendszer akkor lineárisan függő, ha a vegyes szorzat 0:

$$\alpha^2 - 9 = 0 \implies \alpha^2 = 9 \implies \alpha = \pm 3.$$