

1. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Számoljuk ki az alábbi kifejezéseket, ahol $z_1 = 3$ és $z_2 = 1 - 2i$!

$$z_1 + z_2, \overline{z_1 + z_2}, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, |z_1 \cdot z_2|, \frac{z_1}{z_2}$$

Megoldás:

$$z_1 + z_2 = 4 - 2i \quad \overline{z_1 + z_2} = 4 + 2i \quad z_1 - z_2 = 2 + 2i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3 - 6i \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = 3 + 6i \quad |z_1 \cdot z_2| = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{3 + 6i}{5} = 0.6 + 1.2i$$

(”gyöktelenítjük” a nevezőt - eltüntetjük a komplexet)

2. Feladat: Írjuk át az alábbi számokat trigonometria alakba!

$$z_1 = \sqrt{3} - 3i \quad z_2 = -2i$$

*: Ábrázoljuk a számokat a komplex számegeyenesen!

Megoldás:

Megoldás menete: kiszámoljuk az r értékét, ami z abszolút értéke ($r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$), kiemeljük a z valós és képzetes részéből ($z = r \cdot (\frac{x}{r} + i \cdot \frac{y}{r})$), majd kiszámoljuk $\arccos(\frac{x}{r})$ és $\arcsin(\frac{y}{r})$ alapján a közös szöveget.

$$z_1 = \sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \cdot (\cos -60^\circ + i \cdot \sin -60^\circ) =$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos -\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin -\frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = -2i = 2(0 - i \cdot 1) = 2(\cos -90^\circ + i \cdot \sin -90^\circ) = 2 \cdot \left(\cos -\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin -\frac{\pi}{2} \right)$$

3. Feladat: Írjuk át algebrai alakba az alábbi komplex számokat!

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

Megoldás:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = -3 - \sqrt{3}i$$

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket és adjuk meg a megoldást algebrai alakban!

$$a) \quad |z| - z = 4 - 2i,$$

$$b) \quad z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$$

Megoldás:

a) $|z| - z = \sqrt{x^2 + y^2} - (x + iy) = 4 - 2i \rightarrow$ a valós és a képzetes részeket külön kezeljük:

- képzetes: $-iy = -2i \rightarrow y = 2$

- valós: $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 + x \rightarrow x^2 + y^2 = (4 + x)^2 = 16 + 8x + x^2$
 $x^2 + 2^2 = 16 + 8x + x^2 \rightarrow 8x = -12 \rightarrow x = -\frac{12}{8}$

b) másodfokú egyenlet megoldóképletét használjuk:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(5 - 2i) \pm \sqrt{(5 - 2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5(1 - i)}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{-5 + 2i \pm \sqrt{(25 - 20i - 4) - (20 - 20i)}}{2} = \frac{-5 + 2i \pm \sqrt{21 - 20i - 20 + 20i}}{2} = \\ &= \frac{-5 + 2i \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 + 2i \pm 1}{2} \rightarrow z_1 = \frac{-5 + 2i + 1}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i; \\ z_2 &= \frac{-5 + 2i - 1}{2} = \frac{-6 + 2i}{2} = -3 + i \end{aligned}$$

5. Adjuk meg az alábbi kifejezések értékét algebrai alakban!

$$a) (1 + i)^{12} \quad b) (2 - i)^{-3}$$

Megoldás:

Átváltjuk a számot trigonometria alakba, amiben könnyű elvégezni a hatványra emelést.

$$a) \quad (1 + i)^{12} = (\sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ))^{12} = \sqrt{2}^{12} (\cos(12 \cdot 45^\circ) + i \cdot \sin(12 \cdot 45^\circ)) = 64 \cdot (\cos 540^\circ + i \cdot \sin 540^\circ) = 64 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -64$$

$$b) \quad (2 - i)^{-3} \approx (\sqrt{5} (\cos(-26,57^\circ) + i \sin(-26,57^\circ)))^{-3} = (\sqrt{5})^{-3} (\cos(79,71^\circ) + i \sin(79,71^\circ)) \approx \frac{1}{11,18} (0,1786 + 0,9839i) \approx 0,016 + 0,088i = \frac{2}{125} + \frac{11}{125}i$$