

1. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Az alábbi $z = x + iy$ komplex számokra adjuk meg $Re(z)$, $Im(z)$, $\bar{z}$, $|z|$, $\frac{1}{z}$ értékeit!

$$z_1 = 5 + 2i \quad z_2 = 4 - i \quad z_3 = 3i \quad z_4 = 3 - 5i$$

*: Mit jelent geometriailag z abszolút értéke?

Megoldás:

$$\begin{aligned} Re(z_1) = 5 \quad Im(z_1) = 2 \quad \bar{z}_1 = 5 - 2i \quad |z_1| = \sqrt{19} \quad \frac{1}{z_1} &= \frac{5}{19} - \frac{2}{19}i \\ Re(z_2) = 4 \quad Im(z_2) = -1 \quad \bar{z}_2 = 4 + i \quad |z_2| = \sqrt{17} \quad \frac{1}{z_2} &= \frac{4}{17} + \frac{1}{17}i \\ Re(z_3) = 0 \quad Im(z_3) = 3 \quad \bar{z}_3 = -3i \quad |z_3| = 3 \quad \frac{1}{z_3} &= -\frac{1}{3}i \\ Re(z_4) = 3 \quad Im(z_4) = -5 \quad \bar{z}_4 = 3 + 5i \quad |z_4| = \sqrt{34} \quad \frac{1}{z_4} &= \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i \end{aligned}$$

*: z abszolút értéke a komplex számsíkban ábrázolva a vektor hossza

2. Feladat: Számoljuk ki az alábbi kifejezéseket, ahol

(a) $z_1 = 3 + 4i$ és $z_2 = 1 - 2i$

(b) $z_1 = 4i$ és $z_2 = 5 - i$

$$z_1 + z_2, \overline{z_1 + z_2}, z_1 - z_2$$

$$z_1 \cdot z_2, \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, |z_1 \cdot z_2|, \frac{z_1}{z_2}$$

Megoldás:

a) rész:

$$z_1 + z_2 = 4 + 2i \quad \overline{z_1 + z_2} = 4 - 2i \quad z_1 - z_2 = 2 + 6i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 11 - 2i \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = 11 + 2i \quad |z_1 \cdot z_2| = 5\sqrt{5} \quad \frac{z_1}{z_2} = -1 + 2i$$

b) rész:

$$z_1 + z_2 = 5 + 3i \quad \overline{z_1 + z_2} = 5 - 3i \quad z_1 - z_2 = -5 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 4 + 20i \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = 4 - 20i \quad |z_1 \cdot z_2| = 4\sqrt{26} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{13} + \frac{10}{13}i$$

3. Feladat: Írjuk át az alábbi számokat trigonometriai alakba!

$$z_1 = 5 + 5i \quad z_2 = 2\sqrt{3} - 2i \quad z_3 = -i$$

*: Ábrázoljuk a számokat a komplex számegeyenesen!

Megoldás:

Megoldás menete: kiszámoljuk az r értékét, ami z abszolút értéke ($r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$), kiemeljük a z valós és képzetes részéből ($z = r \cdot (\frac{x}{r} + i \cdot \frac{y}{r})$), majd kiszámoljuk $\arccos(\frac{x}{r})$ és $\arcsin(\frac{y}{r})$ alapján a közös szöget.

$$z_1 = 5 + 5i = 5\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 5\sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$$

$$z_2 = 2\sqrt{3} - 2i = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \right) = 4 \cdot (\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ)$$

$$z_3 = -i = 1 \cdot (0 - 1 \cdot i) = 1 \cdot (\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)$$

4. Feladat: Írjuk át algebrai alakba az alábbi komplex számokat!

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

Megoldás:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = -3 - \sqrt{3}i$$

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket és adjuk meg a megoldást algebrai alakban!

$$a) \quad |z| + z = 5 + i,$$

$$b) \quad iz^2 + (2 - 4i)z - 4 - i = 0$$

Megoldás:

a) $|z| + z = \sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 5 + i \rightarrow$ a valós és a képzetes részeket külön kezeljük:

képzetes: $iy = i \rightarrow y = 1$

valós: $\sqrt{x^2 + y^2} + x = 5 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 - x \rightarrow x^2 + y^2 = (5 - x)^2 = 25 - 10x + x^2$
 $x^2 + 1^2 = 25 - 10x + x^2 \rightarrow 10x = 24 \rightarrow x = 2.4$

b) másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján: $z_1 = i, \quad z_2 = 4 + i$

6. Adjuk meg az alábbi kifejezések értékét algebrai alakban!

$$a) (1+i)^{12} \qquad b) (1-i)^{-3}$$

Megoldás:

Átváltjuk a számot trigonometriai alakba, amiben könnyű elvégezni a hatványra emelést.

$$\begin{aligned} a) \quad (1+i)^{12} &= (\sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ))^{12} = \sqrt{2}^{12} (\cos(12 \cdot 45^\circ) + i \cdot \sin(12 \cdot 45^\circ)) \\ &= 64 \cdot (\cos 540^\circ + i \cdot \sin 540^\circ) = 64 \cdot (1 + i \cdot 0) = 64 \end{aligned}$$

$$b) \quad (1-i)^{-3} = (\sqrt{2} \cdot (\cos -45^\circ + i \cdot \sin -45^\circ))^{-3} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$