

3. Feladatsor

Vektorok

1. Feladat: Végezzük el az alábbi vektori szorzásokat, majd hozzuk egyszerűbb alakra az így kapott kifejezéseket!

$$a) (a + b) \times (a - b) \qquad b) (a + b - c) \times (a + b + c)$$

Megoldás:

$$a) (a + b) \times (a - b) = a \times (a - b) + b \times (a - b) = a \times a - a \times b + b \times a - b \times b = a \times a - 2(a \times b) + b \times b = -2(a \times b)$$

$a \times a$ és $b \times b = 0$, mivel a szögük 0° , aminek a szinusza 0.

$$b) (a + b - c) \times (a + b + c) = 2(a \times c) + 2(b \times c)$$

2. Feladat: Állítsuk elő az $\mathbf{a}$ vektort két olyan vektor összegeként, amelyek közül az egyik párhuzamos a $\mathbf{b}$ vektorral, a másik pedig merőleges $\mathbf{b}$ -re! Számítsuk ki e két vektort, ha $\mathbf{a} = (3, 2, 2)$ és $\mathbf{b} = (4, -2, 2)$!

Megoldás:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$$

A párhuzamos komponens a merőleges vetület képletével számítható:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \cdot \mathbf{b}$$

Számítsuk ki a skaláris szorzatot:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 12 - 4 + 4 = 12$$

Számítsuk ki $\mathbf{b}$ hossz négyzetét:

$$|\mathbf{b}|^2 = 4^2 + (-2)^2 + 2^2 = 16 + 4 + 4 = 24$$

Ezek alapján:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{12}{24} \cdot (4, -2, 2) = \frac{1}{2} \cdot (4, -2, 2) = (2, -1, 1)$$

A merőleges komponenst kivonással kapjuk meg:

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} = (3, 2, 2) - (2, -1, 1) = (1, 3, 1)$$

Ellenőrizzük a merőlegességet ($\mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{b} = 0$):

$$\mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

3. Feladat: Határozz meg egy olyan $\mathbf{c}$ vektort, amely az $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$ és $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$ vektorokra merőleges, és hossza 6!

Megoldás:

A két vektorra egyszerre merőleges irányt a vektoriális szorzat adja:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

A komponensek:

$$v_x = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$$

$$v_y = -(1 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = -(2 - 4) = 2$$

$$v_z = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$$

Így:

$$\mathbf{v} = (2, 2, -3)$$

Számítsuk ki $\mathbf{v}$ abszolút értékét (hosszát):

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$$

Ahhoz, hogy 6 hosszúságú vektort kapjunk, normalizáljuk $\mathbf{v}$ -t (elosztjuk a hosszával), majd megszorozzuk a feladatban meghatározott hosszal:

$$\mathbf{c} = \pm 6 \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \pm \frac{6}{\sqrt{17}}(2, 2, -3) = \pm \left(\frac{12}{\sqrt{17}}, \frac{12}{\sqrt{17}}, \frac{-18}{\sqrt{17}} \right)$$

Ellenőrzés (Merőlegesség $\mathbf{a}$ -ra):

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \frac{12}{\sqrt{17}} \cdot 1 + \frac{12}{\sqrt{17}} \cdot 2 + \left(-\frac{18}{\sqrt{17}} \right) \cdot 2 = 0$$

4. Feladat: A következőkben megadott pontok egy síkban vannak?

$$a) A(2, -1, 4), B(-1, 0, 3), C(3, -1, 0), D(1, 1, 2)$$

$$b) A(1, -9, -12), B(2, -7, -13), C(0, -11, -11), D(3, -5, -14)$$

Megoldás:

Akkor vannak egy síkban, ha a pontok közötti 3 vektor vegyes szorzata 0.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (4, -1, -3)$; $\overrightarrow{CD} = (-2, 2, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -20 \neq 0$ tehát nem egy síkban van a 4 pont. A vegyes szorzat kibontva:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{CD} = \det \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Fejtsük ki például az első sor szerint:

$$\begin{aligned}
 &= -3 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= -3 \cdot ((-1) \cdot 2 - (-3) \cdot 2) - 1 \cdot (4 \cdot 2 - (-3) \cdot (-2)) - 1 \cdot (4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-2)) \\
 &= -3 \cdot (-2 + 6) - 1 \cdot (8 - 6) - 1 \cdot (8 - 2) \\
 &= -3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = -12 - 2 - 6 = -20 \neq 0.
 \end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (-2, -4, 2)$; $\overrightarrow{CD} = (3, 6, -3) \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ tehát egy síkban vannak. A szorzat kifejtve:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{CD} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Fejtsük ki az első sor szerint:

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \\
 &= 1 \cdot ((-4) \cdot (-3) - 2 \cdot 6) - 2 \cdot ((-2) \cdot (-3) - 2 \cdot 3) - 1 \cdot ((-2) \cdot 6 - (-4) \cdot 3) \\
 &= 1 \cdot (12 - 12) - 2 \cdot (6 - 6) - 1 \cdot (-12 + 12) = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

5. Feladat: Az alábbiakban megadott vektorpárok közül melyik lehet rombusznak és melyik lehet téglalapnak két szomszédos oldalvektora?

$$a) a = (11, -2, 3) \quad b = (3, 9, -5) \qquad b) a = (3, 2, -7) \quad b = (6, 5, -1)$$

Megoldás:

Akkor lesz téglalap, ha a szomszédos oldalak merőlegesek egymásra, azaz a skaláris szorzatuk nulla: $a \cdot b = 0$. Rombusz esetén a szomszédos oldalak egyenlő hosszúak: $|a| = |b|$ (azaz $|a|^2 = |b|^2$).

a)

$$a \cdot b = 11 \cdot 3 + (-2) \cdot 9 + 3 \cdot (-5) = 33 - 18 - 15 = 0$$

Mivel a skaláris szorzat 0, a két vektor egymásra merőleges ($a \perp b$).

Vizsgáljuk meg a hosszak négyzetét is (lehet simán a hosszt is, csak így megússzuk a gyökvonást):

$$|a|^2 = 11^2 + (-2)^2 + 3^2 = 121 + 4 + 9 = 134$$

$$|b|^2 = 3^2 + 9^2 + (-5)^2 = 9 + 81 + 25 = 115$$

Mivel $|a| \neq |b|$, de a vektorok merőlegesek, így ez a vektorpár egy téglalap két szomszédos oldalvektora lehet.

b)

$$a \cdot b = 1 \cdot 2 + (-10) \cdot 5 + (-7) \cdot (-11) = 2 - 50 + 77 = 29 \neq 0$$

A vektorok nem merőlegesek egymásra.

Számítsuk ki a vektorok hosszának négyzetét:

$$|a|^2 = 3^2 + 2^2 + (-7)^2 = 9 + 4 + 49 = 62$$

$$|b|^2 = 6^2 + 5^2 + (-1)^2 = 36 + 25 + 1 = 62$$

Mivel a két vektor hossza megegyezik ($|a| = |b| = \sqrt{62}$), így ez a vektorpár egy rombusz két szomszédos oldalvektora lehet.