

2. Feladatsor

Komplex számok, vektorok - Megoldások

1. Feladat: Oldjuk meg a következő egyenleteket és adjuk meg a megoldást algebrai alakban!

$$a) 2z^2 = \bar{z}, \quad b) iz^2 + (2 - 4i)z - 4 - i = 0$$

Megoldás:

a) z -t és konjugáltját átírjuk algebrai alakba $(x + iy)$: $2 \cdot (x + iy)^2 = 2 \cdot (x^2 + 2xyi - y^2) = 2x^2 + 4xyi - 2y^2 = x - iy \rightarrow$ a valós és a képzetes részeket külön kezeljük:

képzetes: $4xyi = -yi$, ha $y \neq 0$, akkor leosztunk vele és i -vel, így $4x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$; ha $y = 0$, akkor $x = 0$.

valós: $2x^2 - 2y^2 = x$, ide behelyettesítjük a képzetes résznél kapott x -et: $2 \cdot (-\frac{1}{4})^2 - 2y^2 = -\frac{1}{4} \rightarrow y^2 = \frac{3}{16}$, így a két lehetséges mego: $y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$

Azaz a megoldások: $z_1 = 0 + 0 \cdot i$; $z_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i$; $z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i$

b) használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét, ahol $a = i$; $b = 2 - 4i$; $c = -4 - i \rightarrow$ a megoldások: $z_1 = i$, $z_2 = 4 + i$

2. Feladat: Legyen az $\{a, b, c\}$ vektorrendszer lineárisan független. Döntsük el, hogy az $\{r, s, t\}$ vektorrendszer lineárisan független-e! Állításainkat igazoljuk!

$$\begin{aligned} a) \quad & r = 3a + 2b + c \quad s = 5a - 3b - 2c \quad t = 0, \\ b) \quad & r = 3a - b - c \quad s = 2a + b + 2c \quad t = a - 2b - 3c, \\ c) \quad & r = a + b + c \quad s = -a + c \quad t = a - b + c, \end{aligned}$$

Megoldás:

a) A vektorrendszer nem lineárisan független, mivel $t = 0$ (a zéróvektor), a három vektor között azonnal fennáll egy nemtriviális lineáris kombináció:

$$0 \cdot r + 0 \cdot s + 1 \cdot t = 0.$$

Ez nem a triviális ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) megoldás, tehát a $\{r, s, t\}$ vektorrendszer **lineárisan függő**.

b) A vektorrendszer **lineárisan függő**, mivel $t = r - s$.

c) A vektorrendszer **lineárisan független**, mivel ha

$$\alpha r + \beta s + \gamma t = 0,$$

akkor

$$\alpha(a+b+c) + \beta(-a+c) + \gamma(a-b+c) = (\alpha-\beta+\gamma)a + (\alpha-\gamma)b + (\alpha+\beta+\gamma)c = 0.$$

Mivel a, b, c függetlenek, ezért

$$\alpha - \beta + \gamma = 0, \quad \alpha - \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Egyenletrendszer megoldása $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tehát csak a triviális kombináció adja a nullvektort.

3. Feladat: Az a, b, c és v vektorokat (az $\{i, j, k\}$ alapvektorrendszerre vonatkoztatott) koordinátáikkal adtuk meg. Fejezzük ki a v vektort az a, b és c vektorok lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!

$$a = [1, 0, 0], \quad b = [0, 1, 0], \quad c = [1, 1, 0], \quad v = [2, 1, 3]$$

Megoldás:

Mivel v 3. koordinátája 3, viszont a, b és c 3. koordinátái mind 0, ezért nem állítható elő v a lineáris kombinációjuként.

4. Feladat: Az a és b vektorok szöge $\frac{\pi}{3}$, abszolút értékük: $|a| = 3$ és $|b| = 4$. Számítsuk ki az alábbi skaláris szorzatok értékét!

$$a) \ ab \qquad b) \ a^2 \qquad c) \ (a+b)^2 \qquad d) \ (3a-2b)^2$$

Megoldás:

$$a) \ ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos \text{szög}_{ab} = 3 \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$b) \ a^2 = |a| \cdot |a| \cdot \cos \text{szög}_{aa} = 3 \cdot 3 \cdot \cos 0 = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$$

$$c) \ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 9 + 2 \cdot 6 + |b| \cdot |b| \cdot \cos 0 = 9 + 12 + 4 \cdot 4 \cdot 1 = 37$$

Azért bonthattuk így ki a négyzetre emelt összeget, mivel a skaláris szorzás kommutatív és a vektorösszeadásra nézve disztributív.

$$d) \ (3a-2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2 = 9 \cdot 9 - 12 \cdot 6 + 4 \cdot 16 = 73$$

5. Feladat: Az a, b, c vektorrendszer az α paraméter mely értékeinél lineárisan független, és mely értékeinél lineárisan függő?

$$a) \ a = [\alpha, 1, 2], b = [3, -1, 0], c = [2, 1, 0]$$

$$b) \ a = [3, \alpha, 0], b = [0, 3, \alpha], c = [1, 0, -1]$$

Megoldás:

Akkor lesz lineárisan függő a vektorrendszer, ha a 3 vektor vegyes szorzata 0 (ugyanis ez azt jelenti, hogy egy síkba esnek).

a) A vegyes szorzat kiszámításánál kiesik az α -t tartalmazó tag, és mivel a vegyes szorzat értéke $10 \neq 0$, ezért minden α -ra független lesz a vektorrendszer. Kifejtve:

$$(a \times b) \cdot c = \det \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) = 2 \cdot (3+2) = 10 \neq 0.$$

b) Ha $\alpha = -3$ vagy $\alpha = 3$, akkor a vegyes szorzat értéke 0, ezért függő lesz a vektorrendszer, minden más α -ra független. Kifejtve:

$$(a \times b) \cdot c = \det \begin{bmatrix} 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & \alpha \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Fejtsük ki a determinánst az első sor szerint:

$$\begin{aligned} \det &= 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 3 \cdot (3 \cdot (-1) - \alpha \cdot 0) - \alpha \cdot (0 \cdot (-1) - \alpha \cdot 1) + 0 \\ &= 3 \cdot (-3) - \alpha \cdot (-\alpha) = -9 + \alpha^2 = \alpha^2 - 9. \end{aligned}$$

A vektorrendszer akkor lineárisan függő, ha a vegyes szorzat 0:

$$\alpha^2 - 9 = 0 \implies \alpha^2 = 9 \implies \alpha = \pm 3.$$