3. Feladatsor

Vektorok - Megoldások

1. Feladat: Legyen az {a, b, c} vektorrendszer lineárisan független. Döntsük el, hogy az {r, s, t} vektorrendszer lineárisan független-e! Állításainkat igazoljuk!

$$\begin{array}{lllll} a) & r = 3a + 2b + c & s = 5a–3b - 2c & t = 0, \\ b) & r = 3a - b - c & s = 2a + b + 2c & t = a - 2b - 3c, \\ c) & r = a + b + c & s = -a + c & t = a - b + c, \end{array}$$

Megoldás:
a) A vektorrendszer nem lineárisan független, mivel $t = 0$ (a zéróvektor), a három vektor között azonnal fennáll egy nemtriviális lineáris kombináció:

$$0 \cdot r + 0 \cdot s + 1 \cdot t = 0.$$

Ez nem a triviális ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) megoldás, tehát a $\{r, s, t\}$ vektorrendszer lineárisan függő.

b) A vektorrendszer lineárisan függő, mivel $t = r - s$.

c) A vektorrendszer lineárisan független, mivel ha

$$\alpha r + \beta s + \gamma t = 0,$$

akkor

$$\alpha(a+b+c)+\beta(-a+c)+\gamma(a-b+c) = (\alpha-\beta+\gamma)a+(\alpha-\gamma)b+(\alpha+\beta+\gamma)c = 0.$$

Mivel a, b, c függetlenek, ezért

$$\alpha - \beta + \gamma = 0, \quad \alpha - \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Egyenletrendszer megoldása $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tehát csak a triviális kombináció adja a nullvektort.

2. Feladat: Állítsuk elő az $\mathbf{a}$ vektort két olyan vektor összegeként, amelyek közül az egyik párhuzamos a $\mathbf{b}$ vektorral, a másik pedig merőleges $\mathbf{b}$-re! Számítsuk ki e két vektort, ha $\mathbf{a} = (3, 2, 2)$ és $\mathbf{b} = (4, –2, 2)$!

Megoldás:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$$

A párhuzamos komponens a merőleges vetület képletével számítható:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \cdot \mathbf{b}$$

Számítsuk ki a skaláris szorzatot:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 12 - 4 + 4 = 12$$

Számítsuk ki $\mathbf{b}$ hossznégyzetét:

$$|\mathbf{b}|^2 = 4^2 + (-2)^2 + 2^2 = 16 + 4 + 4 = 24$$

Ezek alapján:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{12}{24} \cdot (4, -2, 2) = \frac{1}{2} \cdot (4, -2, 2) = (2, -1, 1)$$

A merőleges komponenst kivonással kapjuk meg:

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} = (3, 2, 2) - (2, -1, 1) = (1, 3, 1)$$

Ellenőrizzük a merőlegességet ($\mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{b} = 0$):

$$\mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

Valamint az összeget:

$$\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp} = (2, -1, 1) + (1, 3, 1) = (3, 2, 2) = \mathbf{a}$$

3. Feladat: Határozz meg egy olyan $\mathbf{c}$ vektort, amely $\mathbf{a}$ = (2, 2, -1) és $\mathbf{b}$ = (1, 0, 2) vektorra merőleges, és hossza 9!

Megoldás:
A két vektorra egyszerre merőleges irányt a vektoriális szorzat adja:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

A komponensek:

$$v_x = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 = 4$$

$$v_y = -(2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = -(4 + 1) = -5$$

$$v_z = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

Így:

$$\mathbf{v} = (4, -5, -2)$$

Számítsuk ki $\mathbf{v}$ abszolút értékét, hogy megnézzük, a hossz jó-e:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 25 + 4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

A keresett 9 hosszúságú vektorok:

$$\mathbf{c} = \pm 9 \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \pm \frac{9}{3\sqrt{5}}(4, -5, -2) = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}(4, -5, -2)$$

Komponensenként kiírva:

$$\mathbf{c} = \pm \left(\frac{12\sqrt{5}}{5}, -3\sqrt{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5} \right)$$

Ellenőrizzünk:

(a) Merőlegesség **a**-ra:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 4 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 8 - 10 + 2 = 0$$

(b) Merőlegesség **b**-re:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = 4 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 + (-2) \cdot 2 = 4 + 0 - 4 = 0$$

(c) Hossz:

$$|\mathbf{c}| = \frac{3\sqrt{5}}{5} \sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{9 \cdot 5}{5} = 9$$

4. Feladat: A következőkben megadott pontok egy síkban vannak?

a) $A(2, -1, 4),\ B(-1, 0, 3),\ C(3, -1, 0),\ D(1, 1, 2)$
b) $A(1, -9, -12),\ B(2, -7, -13),\ C(0, -11, -11),\ D(3, -5, -14)$

Megoldás:
Akkor vannak egy síkban, ha a pontok közötti 3 vektor vegyes szorzata 0.
a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -1);\ \overrightarrow{BC} = (4, -1, -3);\ \overrightarrow{CD} = (-2, 2, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -20 \neq 0$ tehát nem egy síkban van a 4 pont.
b) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1);\ \overrightarrow{BC} = (-2, -4, 2);\ \overrightarrow{CD} = (3, 6, -3) \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ tehát egy síkban vannak.

5. Feladat: Az alábbiakban megadott vektorpárok közül melyik lehet rombusznak és melyik lehet téglalapnak két szomszédos oldalvektora?

a) $a = (3, 5, -4)\ \ b = (2, -10, -11)$ *b)* $a = (1, -10, -7)\ \ b = (2, 5, -11)$

Megoldás:
Akkor lesz téglalap, ha a szomszédos oldalak merőlegesek egymásra, azaz a skaláris szorzatuk zérus: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Rombusz esetén a szomszédos oldalak egyenlő hosszúak: $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ (azaz $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2$).

a)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-10) + (-4) \cdot (-11) = 6 - 50 + 44 = 0$$

Mivel a skaláris szorzat 0, a két vektor egymásra merőleges ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$).

Vizsgáljuk meg a hosszak négyzetét is:

$$|\mathbf{a}|^2 = 3^2 + 5^2 + (-4)^2 = 9 + 25 + 16 = 50$$

$$|\mathbf{b}|^2 = 2^2 + (-10)^2 + (-11)^2 = 4 + 100 + 121 = 225$$

Mivel $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$, de a vektorok merőlegesek, így ez a vektorpár egy **téglalap** két szomszédos oldalvektora lehet.

b)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 2 + (-10) \cdot 5 + (-7) \cdot (-11) = 2 - 50 + 77 = 29 \neq 0$$

A vektorok nem merőlegesek egymásra.

Számítsuk ki a vektorok hosszának négyzetét:

$$|\mathbf{a}|^2 = 1^2 + (-10)^2 + (-7)^2 = 1 + 100 + 49 = 150$$

$$|\mathbf{b}|^2 = 2^2 + 5^2 + (-11)^2 = 4 + 25 + 121 = 150$$

Mivel a két vektor hossza megegyezik ($|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$), így ez a vektorpár egy **rombusz** két szomszédos oldalvektora lehet.