13. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Az X valószínűségi változó lehetséges értékei -1, 0, 1 és 2. Az ezekhez tartozó valószínűségek rendre $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{4}$. Számítsuk ki X várható értékét és szórását.

   Megoldás:

   $E(X) = (-1) \cdot \dfrac{1}{12} + 0 \cdot \dfrac{5}{12} + 1 \cdot \dfrac{1}{4} + 2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{3}$

   $E(X^2) = (-1)^2 \cdot \dfrac{1}{12} + 0^2 \cdot \dfrac{5}{12} + 1^2 \cdot \dfrac{1}{4} + 2^2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{3}$

   $D(X) = \sqrt{\frac{4}{3} - (\frac{2}{3})^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2. Feladat: Az A, B állandók mely értékei esetén lesz az $F(x) = A + B \cdot \arctan x$ eloszlásfüggvény?

   Megoldás:

   Eloszlásfüggvény $\longleftrightarrow$ $\lim_{x\to-\infty} F(X) = 0$; $\lim_{x\to\infty} F(X) = 1$

   Tehát: $\lim_{x\to-\infty} F(X) = A + B(-\frac{\pi}{2}) = 0 \to A = \frac{\pi}{2}B$; $\lim_{x\to\infty} F(X) = A + B\frac{\pi}{2} = 1 \longrightarrow A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{\pi}$ (ezután még a monotonitást is ellenőrizni kell) $\Longrightarrow F(X) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arctan x$

3. Feladat: Egy boltban a vásárlók által eltöltött időt percekben mérve a következő eloszlásfüggvény jellemzi:

   $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \frac{x}{60}, & \text{ha } 0 < x \le 30, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 30 < x \le 60, \\ \frac{x}{120}, & \text{ha } 60 < x \le 120, \\ 1, & \text{ha } 120 < x. \end{cases}$$

   a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy vásárló a boltban 30, ill. 45 percnél több időt tölt el?

   b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy vásárló a boltban egy óránál több, de másfél óránál kevesebb időt tölt el?

   Megoldás:

a) $F(x > 30) = 1 - F(x \leq 30) = 1 - \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$

$F(x > 45) = 1 - F(x \leq 45) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

b) $F(60 < x < 90) = F(90) - F(60) = \dfrac{1}{4}$

4. Feladat: Legyen egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2, \\ \dfrac{A}{(1-x)^2}, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

ahol A egy megfelelő valós konstans.

a) Számítsuk ki A értékét.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy X a $(2;3)$ intervallumba esik?

Megoldás:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \to \int_{2}^{\infty} \frac{A}{(1-x)^2}\, dx = 1$, ha elvégezzük az integrálást, akkor kijön, hogy $A = 1$.

b) $P(2 < x < 3) = \displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{(1-x)^2}\, dx = \frac{1}{2}$

5. Feladat: Legyen egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \cos \dfrac{x}{2}, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{különben}, \end{cases}$$

ahol A egy megfelelő valós konstans.

a) Számítsuk ki A értékét.

b) Számítsuk ki X várható értékét és szórását.

c) Írjuk fel X eloszlásfüggvényét.

Megoldás:

a) $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{0}^{\pi} A \cos \frac{\pi}{2}\, dx = 2A \to A = \frac{1}{2}$

b) $E(X) = \displaystyle\int_{0}^{\pi} x \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos \frac{\pi}{2}\, dx = \pi - 2$

$E(X^2) = \displaystyle\int_{0}^{\pi} x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}\, dx = \pi^2 - 8$

$D(X) = \sqrt{\pi^2 - 8 - (\pi - 2)^2} = 2\sqrt{\pi - 3}$

c)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\; dt = \sin\frac{x}{2}, & 0 < x < \pi \\ 1, & x \ge \pi. \end{cases}$$

6. Feladat: Legyen egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 1 - \cos x, & \text{ha } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{ha } \dfrac{\pi}{2} < x, \end{cases}$$

Adjuk meg a $2X + 1$ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

Megoldás:

a) Bevezetünk egy új valváltozót: $Y = 2X + 1 \rightarrow F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X + 1 \le y) = P(X \le \frac{y-1}{2}) = F_X(\frac{y-1}{2}) \longrightarrow$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \frac{y-1}{2} \le 0 \rightarrow y \le 1, \\ 1 - \cos\frac{y-1}{2}, & 0 < \frac{y-1}{2} < \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 < y < 1 + \pi \\ 1, & \frac{y-1}{2} \ge \frac{\pi}{2} \rightarrow y \ge 1 + \pi. \end{cases}$$

b) A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja.

Ha $y \ge 1 + \pi$ vagy $y \le 1 \longrightarrow f_Y(y) = 0$

Ha $1 < y < \pi + 1$: $\dfrac{d}{dy}(1 - \cos\frac{y-1}{2}) = \dfrac{1}{2}\sin\frac{y-1}{2}$

7. Feladat: Legyen egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1 + x^2)}, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x \ge 0, \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy X-nek nem létezik várható értéke.

Megoldás:

$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\; dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot \frac{2}{\pi(1 + x^2)}\; dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1 + x^2}\; dx = \frac{2}{\pi}\lim_{a \to -\infty}\left[\frac{1}{2} \cdot \ln(1 + x^2)\right]_a^0 = -\infty$, tehát tényleg nincs véges várható értéke.

8. Feladat: Legyen egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \dfrac{2}{x^3}, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy X-nek nem létezik szórása.

Megoldás:

$D(X) = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$

$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\ dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{2}{x^3}\ dx = 2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 2$

$E(X^2) = \displaystyle\int_1^{\infty} x^2 \cdot \frac{2}{x^3}\ dx = 2\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = 2 \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$, tehát nem fog létezni véges szórás sem.