12. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Állapítsuk meg, független-e A és B.

   Megoldás:

   Akkor független A és B, ha $P(A) \cdot P(B) = P(A \cdot B)$, tehát ezeket a valószínűségeket számoljuk ki az ellenőrzéshez.

   $P(A) = \dfrac{2^3 - 2}{2^3} = \dfrac{3}{4}$ (a kedvező esetek száma az összes eset - amikor mind a 3 dobás ugyanaz - FFF vagy ÍÍÍ)

   $P(B) = \dfrac{4}{2^3} = \dfrac{1}{2}$ (a kedvező esetek száma 4: FFF, FFÍ, FÍF, ÍFF)

   $P(A \cdot B) = \dfrac{3}{2^3} = \dfrac{3}{8}$ (a kedvező esetek száma 3: FFÍ, FÍF, ÍFF)

   $\longrightarrow P(A) \cdot P(B) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} = P(A \cdot B)$, tehát független A és B.

2. Feladat: Két szabályos kockával dobunk. Tekintsük a következő eseményeket:

   $A = \{$a dobott számok összege páros$\}$,

   $B = \{$a dobott számok különbségének abszolút értéke legalább három$\}$.

   Független-e A és B? Számoljuk ki az A valószínűségét feltéve, hogy B bekövetkezik.

   Megoldás:

   $P(A) = \dfrac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{6^2} = \dfrac{1}{2}$ (a kedvező esetek amikor mindkettő dobás páros vagy mindkettő páratlan)

   $P(B) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$ (kedvező: $(4,1), (5,1), (5,2), (6,1), (6,2), (6,3)$ és fordítva)

   $P(A \cdot B) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9} \neq P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{6}$, tehát nem függetlenek.

   $P(A|B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \dfrac{1/9}{1/3} = \dfrac{1}{3}$

 kovacskd@math.bme.hu

3. Feladat: Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy két kockával dobva mindkét érték páros, feltéve, hogy összegük legalább tíz.

   Megoldás:

   Legyen $A =$\{mindkét érték páros\}, $B =$\{két dobás összege 10\}.

   $P(B) = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6}$ (kedvező esetek: $(5,5),(4,6),(6,4),(6,5),(5,6),(6,6)$)

   $P(A \cdot B) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12} \Longrightarrow P(A|B) = \dfrac{1/12}{1/6} = \dfrac{1}{2}$

4. Feladat: Először húzunk egy lapot egy 52 lapos franciakártya-csomagból. Ha ez pikk, egyszer, egyébként kétszer dobunk fel egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos dobás?

   Megoldás:

   Legyen $p =$\{pikket húzunk\}, $H =$\{hatost dobunk\}

   $P(p) = \dfrac{1}{4}, P(p^c) = \dfrac{3}{4}, P(H|p) = \dfrac{1}{6}$ (mert ilyenkor egy kockával dobunk), $P(H|p^c) = 1 - \left(\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{11}{36}$ (ilyenkor 2 kockával dobunk és kivonjuk azt a valószínűséget 1-ből, hogy egyik kockával sem dobunk 6-ost)

   $P(H) = P(H|p) \cdot P(p) + P(H|p^c) \cdot P(p^c) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{11}{36} = \dfrac{13}{48}$

5. Feladat: Két urna közül az egyikben 5 zöld és 7 kék, a másikban 3 zöld és 8 kék golyó van. Az elsőből átrakunk kettőt a másodikba, majd a másodikból húzunk egyet. Mennyi az esélye, hogy az utoljára húzott golyó kék?

   Megoldás:

   3 eset van aszerint, hogy a két átrakott golyó milyen színű:

   $\to$ 2 kék ($P(KK) = \dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{7}{22}$ valószínűséggel), ekkor a második urnában 3 zöld és 10 kék golyó lesz $\to$ $P(K|KK) = \dfrac{10}{13}$ a valószínűsége a kék húzásának

   $\to$ 1 zöld, 1 kék ($P(ZK) = \dfrac{7 \cdot 5}{\binom{12}{2}} = \dfrac{35}{66}$ valószínűséggel), ekkor a második urnában 4 zöld és 9 kék golyó lesz $\to$ $P(K|ZK) = \dfrac{9}{13}$ a valószínűsége a kék húzásának

   $\to$ 2 zöld ($P(ZZ) = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{5}{33}$ valószínűséggel), ekkor a második urnában 5 zöld és 8 kék golyó lesz $\to$ $P(K|KK) = \dfrac{8}{13}$ a valószínűsége a kék húzásának $\Longrightarrow$ $P(K) = P(K|KK) \cdot P(KK) + P(K|ZK) \cdot P(ZK) + P(K|ZZ) \cdot P(ZZ) = \dfrac{55}{78}$

6. Feladat: Egy iskola egy évfolyamán három osztály van: az A, a B ill. a C osztályok. Mindhárom osztály egyforma létszámú. Az A osztályban a diákoknak pontosan a negyede tanul németül, míg a B osztályban ez az arány 1/3. A C osztály diákjainak hányad része tanul németül, ha tudjuk, hogy (egyenletesen) véletlenszerűen választva egy diákot az évfolyamról, a következő események függetlenek:

   $N = \{$a választott diák németül tanul$\}$

   $A = \{$a választott diák az A osztályba jár$\}$.

   Megoldás:

   Ismerjük: $P(N|A) = \dfrac{1}{4}$, $P(N|B) = \dfrac{1}{3}$, $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$

   N és A függetlenek $\Longrightarrow P(N \cdot A) = P(N) \cdot P(A)$. $P(N) = P(N|A) = \dfrac{1}{4}$

   Teljes valószínűség tétele alapján: $P(N) = P(N|A) \cdot P(A) + P(N|B) \cdot P(B) + P(N|C) \cdot P(C)$, ezek közül csak a $P(N|C)$-t nem ismerjük, és erre vagyunk egyébként is kíváncsiak. Behelyettesítés és átrendezés után: $P(N|C) = \dfrac{1}{6}$

7. Feladat: Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy szabályos érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat.

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet?

   b) Feltéve, hogy egyszer sem dobunk fejet, mennyi a valószínűsége, hogy a kockával 6-ost dobtunk?

   Megoldás:

   a) $P(0$ fej$)= \sum_1^6 \frac{1}{6} \cdot (\frac{1}{2})^k = \dfrac{63}{384}$ (ahányat mutat a kocka, annyiszor 1/2 az esélye, hogy írás lesz, azaz nem fej)

   b) $P(X = 6|0$ fej$)= \dfrac{P(X = 6 \cap 0fej)}{P(0fej)} = \dfrac{1/6 \cdot (1/2)^6}{63/384} = \dfrac{1}{63}$

8. Feladat: Feldobunk két szabályos dobókockát és ha k darab hatos az eredmény, akkor k piros és $2 - k$ sárga golyót teszünk egy (kezdetben üres) dobozba. Ezután kétszer húzunk visszatevéssel: mindkét húzásra piros golyót húzunk. Mit tippelnénk k értékére? Mekkora esélyünk van eltalálni?

   Megoldás:

   Legyen $k(= 0; 1; 2)$ a dobott 6-osok száma.

   $P(k = 0) = (5/6)^2 = \dfrac{25}{36}$, ekkor 0 piros, 2 sárga $\rightarrow P(PP|k = 0) = 0$

   $P(k = 1) = (1/6)(5/6) + (1/6)(5/6) = \dfrac{5}{18}$, 1 piros, 1 sárga $\rightarrow P(PP|k = 1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$P(k=2) = (1/6)^2 = \dfrac{1}{36}$, 2 piros, 0 sárga $\rightarrow P(PP|k=2) = 1$

Teljes valószínűség: $P(PP) = P(PP|k=0) \cdot P(k=0) + P(PP|k=1) \cdot P(k=1) + P(PP|k=2) \cdot P(k=2) = \dfrac{7}{72}$

A $k=1$-et érdemes tippelni, mert annak a valószínűsége a legnagyobb. Ha $k=1$-et tippelünk, akkor az esély arra, hogy eltaláljuk:

$P(k=1|PP) = \dfrac{P(PP|k=1) \cdot P(k=1)}{P(PP)} = \dfrac{5}{7}$

9. Feladat: Egy cégnek két irodája van, az egyik Prágában, a másik pedig Isztambulban, ahol a cég dolgozóinak fele-fele dolgozik. A prágai irodában dolgozók egyharmadának kedvenc itala a kávé, másik egyharmadának az ásványvíz, harmadik egyharmadának pedig a sör. Az isztambuli irodában dolgozók felének kedvenc itala szintén a kávé, másik felének pedig a tea. (Minden dolgozónak pontosan egy kedvenc itala van, a felsoroltak közül.) Véletlenszerűen kiválasztjuk a cég egy dolgozóját.

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé?

   b) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala a kávé, mi a valószínűsége, hogy Isztambulban dolgozik?

   c) Feltéve, hogy a dolgozó kedvenc itala nem a kávé, mi a valószínűsége, hogy a sör az?

   Megoldás:

   P: Prága, I: Isztambul, K: kávé, A: ásványvíz, S: sör, T: tea

   $P(P) = P(I) = \dfrac{1}{2}$, $P(K|P) = P(A|P) = P(S|P) = \dfrac{1}{3}$, $P(K|I) = P(T|I) = \dfrac{1}{2}$, $P(T|P) = P(A|I) = P(S|I) = 0$

   a) $P(K) = P(K|P) \cdot P(P) + P(K|I) \cdot P(I) = \dfrac{5}{12}$

   b) $P(I|K) \overset{Bayes-tétel}{=} \dfrac{P(K|I) \cdot P(I)}{P(K)} = \dfrac{3}{5}$

   c) $P(K^c) = 1 - P(K) = \dfrac{7}{12}$, $P(S \cdot K^c) = P(P) \cdot P(S|P) + P(I) \cdot P(S|I) = \dfrac{1}{6} \Longrightarrow P(S|K^c) = \dfrac{P(S \cdot K^c)}{P(K^c)} = \dfrac{2}{7}$

10. Feladat: Adott egy vizsgakérdés, három lehetséges válasszal. Egy hipotetikus hallgató p valószínűséggel tudja a helyes választ, míg ha nem tudja, tippel (egyenlő eséllyel választva a három válasz közül). Feltéve, hogy helyesen válaszolt, mi a valószínűsége, hogy tudta is a választ a hallgató? Mi a helyzet $p = \frac{1}{4}$ esetén?

    Megoldás:

    U: tudja a választ, T: tippel, H: helyes a válasz

$$P(U) = p,\ P(T) = 1 - p,\ P(H|U) = 1,\ P(H|T) = \frac{1}{3} \longrightarrow$$

$$P(H) = P(H|U) \cdot P(U) + (H|T) \cdot P(T) = p + \frac{1}{3}(1 - p)$$

Bayes: $P(U|H) = \dfrac{P(H|U) \cdot P(U)}{P(H)} = \dfrac{p}{\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}}$

Ha $p = \frac{1}{4} \to P(U|H) = \dfrac{1/4}{(2/3)(1/4) + 1/3} = \dfrac{1}{2}$