12. Feladatsor

Integrálás III. - Megoldások

1. Feladat: Állapítsuk meg, hogy az alábbi nem korlátos függvények improprius integráljai, illetve a végtelen intervallumokon vett improprius integrálok konvergensek-e, és ha igen, határozzuk meg az értéküket!

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

c) $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^4}}dx$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x}dx$

Megoldások:

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x/2)^2}} = \lim_{b\to 2-0}\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^b = \frac{\pi}{2}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}\ dx \overset{*}{=} \lim_{b\to\infty}\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} -(b+1)e^{-b}+1 = 1$

* parciális integrálással oldjuk meg

c) $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^4}}dx = \int_{-3}^0 (x+2)^{-4/5}dx = \lim_{a\to -2-0}\left[5(x+2)^{1/5}\right]_{-3}^a + \lim_{b\to -2+0}\left[5(x+2)^{1/5}\right]_b^0 = 5\left(1+\sqrt[5]{2}\right)$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx \overset{u=\ln x}{=} \int_0^\infty u^2e^{-u}\,du = 2$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(1+x)\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\ln(1+b) = \infty$, tehát nem konvergens az integrál.

kovacskd@math.bme.hu