11. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Jelölje A azt az eseményt, hogy egy adott napon van matematika előadás, B pedig azt az eseményt, hogy van fizika előadás. Mit jelentenek a következő események?

a) AB	d) $\overline{A}$	g) $\overline{A+B}$	j) $A\overline{B}+\overline{A}B$	m) $A+\overline{A}\cdot B$
b) $B\backslash A$	e) $\overline{A}+B$	h) $\overline{A}\cdot\overline{B}$	k) $AB+\overline{A}\cdot\overline{B}$	
c) $A+B$	f) $A\overline{B}$	i) $\overline{AB}$	l) $\overline{A}+\overline{B}$	

Megoldás:

a) AB: az adott napon van matematika és fizika előadás is

b) $B\backslash A$: adott nap van fizika előadás, de nincs matematika előadás

c) $A+B$: adott nap van matematika vagy fizika előadás (legalább az egyik)

d) $\overline{A}$: adott nap nincs matematika előadás

e) $\overline{A}+B$: adott nap nincs matematika előadás vagy van fizika előadás (legalább az egyik igaz a kettőből)

f) $A\overline{B}$: van matematika előadás és nincs fizika előadás

g) $\overline{A+B}$: nincs se matematika, se fizika előadás (de Morgan azonosság: $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$)

h) $\overline{A}\cdot\overline{B}$: nincs se matematika, se fizika előadás

i) $\overline{AB}$: nem igaz, hogy mindkettő előadás van (tehát legalább az egyik nincs, $=\overline{A}+\overline{B}$

j) $A\overline{B}+\overline{A}B$: pontosan az egyik előadás van (kizáró vagy = XOR)

k) $AB+\overline{A}\cdot\overline{B}$: vagy mindkettő előadás van vagy egyik sem

l) $\overline{A}+\overline{B}$: legalább az egyik előadás nincs ($=i$))

m) $A+\overline{A}\cdot B$: van matek, vagy nincs matek és van fizika ($=A+B$)

2. Feladat: Egy dobókockát négyszer egymás után feldobunk. Legyen A_i az az esemény, hogy az i-edik dobás hármas. Fejezzük ki az A_i-k segítségével az alábbi eseményeket:

   a) a negyedik dobásra kapunk először hármast,

   b) legalább egyszer hármast dobunk,

c) pontosan kétszer dobunk hármast,

d) az első és a harmadik dobás hármas, a többi közül az egyik biztosan nem hármas.

Megoldás:

a) $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4$ (az első 3 dobás nem hármas, a 4. igen)

b) $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ (legalább az egyik igaz)

c) $A_1 A_2 \overline{A_3 A_4} + A_1 A_3 \overline{A_2 A_4} + A_1 A_4 \overline{A_2 A_3} + A_2 A_3 \overline{A_1 A_4} + A_2 A_4 \overline{A_1 A_3} + A_3 A_4 \overline{A_1 A_2}$ (mindig pont kettő igaz, és ebből felírtuk az összes lehetőséget)

d) $A_1 A_3 (\overline{A_2} + \overline{A_4})$

3. Feladat: Egy dobozban tíz golyó van az $1, ..., 10$ számokkal megjelölve. Egyenként kihúzzuk a golyókat (visszatevés nélkül). Mennyi a valószínűsége annak, hogy az elsőt kivéve minden húzásra nagyobb sorszámú golyót húzunk, mint az azt megelőző húzásnál?

   Megoldás:

   Mivel számozva vannak a golyók és mindegyikből pontosan egy darab van, ezért pontosan egy féleképp tudjuk őket növekvő sorrendbe helyezni $\rightarrow$ kedvező esetek száma $= 1$

   Összesen 10! módon lehet őket sorrendbe rendezni, ez az összes esetek száma. $\Longrightarrow P = \frac{kedvez\H{o}}{\ddot{o}sszes} = \frac{1}{10!}$

4. Feladat: Mennyi annak a valószínűsége, hogy az AAAAEOGPRRMMLL betűket véletlenszerűen egymás mellé írva éppen a PARALELOGRAMMA szót írjuk le?

   Megoldás:

   Ha úgy vesszük, hogy az összes eset $\frac{14!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$, vagyis nem vesszük külön esetnek az ugyanolyan betűk egymás közti felcserélését, akkor a kedvező esetek száma ezek közül 1.

   $\Longrightarrow P = \frac{kedvez\H{o}}{\ddot{o}sszes} = \frac{1}{14!/(4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!)} \approx 2.2 \times 10^{-9}$

   (Ha az összes esetet 14!-nak vesszük, akkor a kedvező esetek száma $4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$, tehát a valószínűség ugyanaz.)

5. Feladat: Egy dobókockát hatszor egymás után feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám szerepelni fog a dobássorozatban?

   Megoldás:

   Összes eset: 6^6 (minden dobás 6 féle lehet), a kedvező esetek: 6! (minden dobás különböző) $\rightarrow P = \frac{6!}{6^6} \approx 0.0154$

6. Feladat: Véletlenszerűen leírtunk egy 1-gyel kezdődő hatjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden számjegy különböző?

   Megoldás:

   Összes eset: 10^5 (az első számjegy fix, a maradék 5 számjegy $0-9$ bármi lehet), kedvező eset: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (1 nem lehet a maradék, mert az volt az első számjegy, és mindig amit választunk, az már nem lehet a következőknél)
   $\longrightarrow P = \dfrac{15120}{10^5} = 0.1512$

7. Feladat: Egy 52 lapos franciakártya-pakliból 10 lapot találomra kihúzunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a pikk dáma a kihúzott lapok között lesz?

   Megoldás:

   Összes eset: 52-ből húzunk 10 lapot = $\binom{52}{10}$, kedvező esetek: leválasztjuk a pikk dámát, mert azt fix ki akarjuk húzni a kedvező esetekben, a maradék 9 mindegy $\rightarrow \binom{51}{9}$

   $\longrightarrow P = \dfrac{\binom{51}{9}}{\binom{52}{10}} = \dfrac{5}{26} \approx 0.1923$

8. Feladat: Egy tisztségre 3 jelölt van, akikre 21-en titkosan szavaznak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom jelölt ugyanannyi szavazatot kap, ha mindenki csak egy jelöltre szavaz?

   Megoldás:

   Összes eset: 3^{21} (21 ember szavaz 3 lehetőség közül), kedvező eset: mindenki ugyanannyit, azaz 7 szavazatot kap: $\dfrac{21!}{7! \cdot 7! \cdot 7!}$ (nem számít, hogy ki kire szavaz, ezért a sorrendjüket nem vesszük különbözőnek)

   $\longrightarrow P = \dfrac{21!/(7! \cdot 7! \cdot 7!)}{3^{21}} \approx 0.0382$