11. Feladatsor

Integrálás II. - Megoldások

1. Feladat: Számítsuk ki a területüket az alábbi egyenletű görbék által határolt korlátos síkidomoknak!

a) $y = x^2, \quad y = 1 - x^2$

b) $y = 2x^2 - 1, \quad y = 0$

c) $y^2 = x + 3, \quad y = \frac{1}{2}x$

d) $y = x^2, \quad y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 4$

Megoldások:

Két görbe (y_1, y_2) által közrezárt terület: $\int_a^b y_1 - y_2 \; dx$, ahol a, b a két görbe metszéspontjai, és y_1 az a görbe, ami ezen metszéspontok között "feljebb van" (azaz az intervallumon $y_1 \geq y_2$).

a) A metszéspontok az $x^2 = 1 - x^2$ egyenletből jönnek ki $\rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, a kettő közötti intervallumon $y = 1 - x^2$ van feljebb (pl. 0-ban érdemes megnézni), így az lesz az y_1.

$$T = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - x^2 - x^2 \; dx = \left[x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

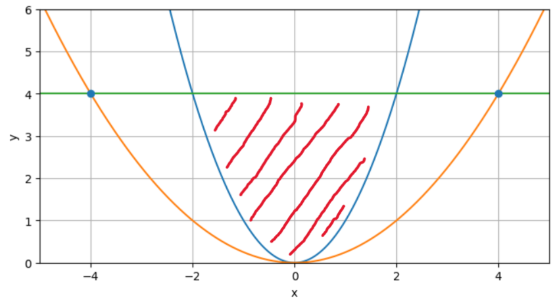
b) Metszéspontok: $2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, az $y = 0$ van feljebb az intervallumon, tehát az integrál és az eredmény ugyanaz lesz, mint az a) feladatban.

c) Ennél a feladatnál érdemes y helyett x-re rendezni, így el tudjuk kerülni a gyökvonás okozta $\pm$ eseteket, így y szerint fogunk integrálni is.

A két görbe tehát: $x = y^2 - 3$ és $x = 2y$, a metszéspontok: $y^2 - 3 = 2y \rightarrow y = -1; 3$. Ezen az intervallumon az $x = 2y$ görbe van feljebb, így az integrálunk: T$= \int_{-1}^{3} 2y - y^2 + 3 \; dy = \left[y^2 - \frac{y^3}{3} + 3y\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$

d) Két féleképp is tudjuk értelmezni a feladatot:

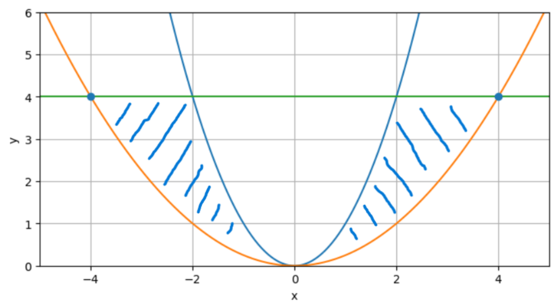
1. A három görbe által határolt terület az alábbi ábrán pirossal jelölt rész:



Ebben az esetben lényegében mivel az $y = x^2$ teljesen az $y = \frac{1}{4}x^2$ belsejében van, ezért csak az $y = x^2$ és az $y = 4$ által közrezárt területet nézzük.

$\int_{-2}^{2} 4 - x^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$

A másik lehetőség az az ábrán kékkel jelölt rész:



Ekkor az $y = \frac{1}{4}x^2$ és az $y = 4$ közötti részből ki kell vonni az $y = x^2$ és $y = 4$ közötti területet.

$\int_{-4}^{4} 4 - \frac{1}{4}x^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{12}\right]_{-4}^{4} = \frac{64}{3}$. A másik részt az 1. megoldásnál kiszámoltuk, így a végső terület: $\frac{64}{3} - \frac{32}{3} = \frac{32}{3}$

2. Feladat: Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbe x-tengely körüli megforgatásával, valamint a megadott intervallum végpontjaiban az x-tengelyre merőlegesen állított síkok által határolt forgástest térfogatát.

a) $y = x - \frac{1}{x}, \quad [1;3]$

b) $y = \cos^2 x, \quad [0;\pi]$

Megoldások:

A forgástest térfogata: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, ahol f-el van megadva a forgatott görbe.

a) $V = \pi \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^3 x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\ dx = \frac{16\pi}{3}$

b) $V = \pi \int_0^\pi (\cos^2 x)^2 \; dx \stackrel{*}{=} \pi \int_0^\pi \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \; dx = \frac{3\pi^2}{8}$

* A $\cos^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$ összefüggést használva tudjuk átalakítani az integrál belsejét.

3. Feladat: Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbeívek x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelületek felszínét.

   a) $y = \sqrt{x}, \quad x \in [0;1]$ b) $y = \sin x, \quad [0;\pi]$

   Megoldások:

   A forgástest felszíne: $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} \; dx$

   a) $y = \sqrt{x},\; y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} \; dx \stackrel{*}{=} 2\pi \int_0^1 \sqrt{x+\frac{1}{4}} \; dx = \pi \cdot \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$

   * Kibontottuk a zárójelet, illetve egybevontuk a két gyököt (mert szorzás esetén ezt meg lehet csinálni).

   b) $y = \sin x,\; y' = \cos x \to A = 2\pi \int_0^\pi \sin x \cdot \sqrt{1+\cos^2 x} \; dx$

   A $\cos x = \sinh u$ helyettesítéssel: $A = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{\sinh 2u}{2}\right) + C$; így
   $A = -\pi \left[arsh \cos x + \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\right]_0^\pi = \pi\left(2\sqrt{2} + 2\ln(1+\sqrt{2})\right).$