10. Feladatsor

Integrálás I. - Megoldások

1. Feladat: Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét!

a) $\displaystyle\int 2e^x + \frac{5}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\ dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\ dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2 - 2x - 1}\ dx$

e) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\ dx$

f) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\ dx$

g) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\ dx$

Megoldás:

A két új integrálási szabály: $\displaystyle\int f^v(x) \cdot f'(x)\ dx = \frac{f^{v+1}(x)}{v+1} + C$, illetve $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

a) $\displaystyle\int 2e^x + \frac{5}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = 2e^x + 5\ln|x| + \tan x + C$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\ dx = -\int -\sin x \cdot (\cos x)^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{(\cos x)^{-\frac{1}{2}}}{-1/2} + C = -\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$

Itt az 1. szabályt alkalmaztuk, $f(x) = \cos x$ és $v = -\frac{3}{2}$ esethez.

c) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\ dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x\ dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C$

1. szabály, $f(x) = \ln x$ és $v = 2$ esetén.

d) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2 - 2x - 1}\ dx = \int \frac{1}{3(x-1)(x+\frac{1}{3})}\ dx \overset{*}{=}$
$\displaystyle\int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln(x-1) - \frac{1}{4} \cdot \ln(x+\frac{1}{3}) + C$

A *-nál parciális törtekre bontással kaphatjuk meg a tört felbontását.

kovacskd@math.bme.hu

e) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\ dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-4} x\ dx = -\frac{1}{3}\int -3\sin^3 x \cdot (\cos^3 x)^{-\frac{4}{3}} dx =$
$\displaystyle -\frac{1}{3} \cdot \frac{(\cos^3 x)^{-\frac{1}{3}}}{-1/3} + C = \frac{1}{\cos x} + C$

Itt is az 1. szabályt használtuk, $f(x) = \cos^3 x$ és $v = -\frac{4}{3}$ esetén.

f) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln|1+e^{2x}| + C$

Itt a 2. szabályt alkalmaztuk, azért hogy a számlálóban tényleg a derivált legyen, még kicsit át kellett alakítani, hogy a konstans is stimmeljen.

g) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\ dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

2. Feladat: A parciális integrálás módszerével oldjuk meg az alábbi feladatokat!

a) $\displaystyle\int x\cos x\ dx$

b) $\displaystyle\int x^3 \sin x\ dx$

c) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\ dx$

d) $\displaystyle\int \ln^2 x\ dx$

Megoldás:

Parciális integrálás: $\displaystyle\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

a) $\displaystyle\int x\cos x\ dx \overset{f'=\cos x,\ g=x}{=} \sin x \cdot x - \int \sin x = x\sin x + \cos x + C$

b) $\displaystyle\int x^3 \sin x\ dx \overset{f'=\sin x,\ g=x^3}{=} -x^3\cos x - \int -\cos x \cdot 3x^2\ dx$
$\displaystyle = -x^3\cos x + 3\int \cos x \cdot x^2\ dx \overset{f'=\cos x,\ g=x^2}{=} -x^3\cos x + 3\sin x \cdot x^2 -$
$\displaystyle 3\int \sin x \cdot 2x\ dx = -x^3\cos x + 3\sin x \cdot x^2 - 6\int x \cdot \sin x\ dx \overset{f'=\sin x,\ g=x}{=}$
$\displaystyle -x^3\cos x + 3\sin x \cdot x^2 + 6\cos x \cdot x - 6\int -\cos x\ dx =$
$\displaystyle -x^3\cos x + 3\sin x \cdot x^2 + 6\cos x \cdot x + 6\int \cos x\ dx =$
$-x^3\cos x + 3\sin x \cdot x^2 + 6\cos x \cdot x + 6\sin x + C$

c) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\ dx \overset{f'=e^{-2x},\ g=x^2}{=} \ldots = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \tfrac{1}{2}) + C$

d) $\displaystyle\int \ln^2 x\, dx \overset{f'=1,\ g=\ln^2 x}{=} x\cdot\ln^2 x - \int x \cdot \frac{2\ln x}{x} dx = x\cdot\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx \overset{f'=1,\ g=\ln x}{=}$
$\displaystyle x \cdot \ln^2 x - 2x\ln x - 2\int x \cdot \frac{1}{x}\ dx = x \cdot \ln^2 x - 2x\ln x - 2x + C$