9. Feladatsor

Taylor-polinomok - Megoldások

1. Feladat: Írjuk fel az alábbi függvények x_0 ponthoz tartozó harmadik Taylor-polinomját és a Taylor-formula maradéktagját.

   a) $\dfrac{1}{x},\ x_0 = 1$ b) $\sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ c) $e^x,\ x_0 = 0$

   Megoldás:

   x_o körüli n-edfokú Taylor-polinom: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$;
   maradéktag: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$ (ξ egy x_0 és x közötti szám).

   a) $T_3(x) = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3$; $R_3(x) = \dfrac{(x-1)^4}{\xi^5}\quad (1 < \xi\ < x)$

   b) $T_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$;

   $R_3(x) = \dfrac{\sin\xi}{24}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 \quad (\frac{\pi}{6} < \xi\ < x)$

   c) $T_3(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$; $R_3(x) = \dfrac{e^{\xi}x^4}{24} \quad (0 < \xi\ < x)$

2. Feladat: Írjuk fel az f függvény a ponthoz tartozó 6-odfokú Taylor-polinomját. Mely x helyeken közelíti ez a polinom 0.001-nél kisebb hibával az f függvényt?

   a) $f(x) = \cos x, \quad a = 0$ b) $f(x) = \sin x, \quad a = 1$

   Megoldás:

   a) $T_6(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!}$;

   $R_6(x) = \dfrac{\sin\xi}{7!}x^7$, mivel $|\sin x| \leq 1$, ezért a közelítéshez az $\dfrac{|x|^7}{7!} < 0.001$ egyenlőtlenséget kell megoldani $\rightarrow$ $|x| < 0.9$ helyeken lesz megfelelően kicsi a hiba.

   b) $T_6(x) = \sin 1 + \cos 1\,(x-1) - \frac{\sin 1}{2!}(x-1)^2 - \frac{\cos 1}{3!}(x-1)^3 \frac{\sin 1}{4!}(x-1)^4 + \frac{\cos 1}{5!}(x-1)^5 - \frac{\sin 1}{6!}(x-1)^6$;

   $R_6(x) = \frac{-\cos\xi}{7!}(x-1)^7 \rightarrow |R_6(x)| \leq \frac{|x-1|^7}{7!} \rightarrow \frac{|x-1|^7}{7!} < 0.001 \rightarrow |x-1|^7 < 0.001 \cdot 7! = 5.04 \rightarrow |x-1| < \sqrt[7]{5.04} \approx 1.26$

3. Feladat: Fejezzük ki a $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ függvényt az $x + 1$ polinomjaként.

   Megoldás:

   Lényegében a feladat kérése az az, hogy írjuk fel az $x_0 = -1$ körüli Taylor-polinomját $P(x)$-nek, ugyanis az $(x - x_0)^k$ tagok miatt ugyanazt jelenti, mint a feladat. Mivel ez egy negyedfokú polinom, ezért egy negyedfokú Taylor-polinommal már fel lehet írni.

   $T_4(x) = 1(x + 1)^0 - 2(x + 1)^1 + 4(x + 1)^2 - 3(x + 1)^3 + (x + 1)^4$