8. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Határozzuk meg az alábbi elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását, illetőleg a feladatokban megadott kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldását!

   a) $y' \sin x - y \cos x = e^x \sin^2 x; \qquad y(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{\pi}{6}}$

   b) $y' - y = x - 2 \sin x; \qquad y(0) = 1$

   c) $y' + y = \cos x; \qquad y(0) = 1$

   Megoldás:

   a) Általános megoldás: $y = c \sin x + e^x \sin x$, a kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldás: $c = e^{\frac{\pi}{6}} \to y = e^{\frac{\pi}{6}} \sin x + e^x \sin x$.

   b) Ált.mo: $y = ce^x - x - 1 + \cos x + \sin x$, a kezdeti feltételhez tartozó partikuláris mo: $c = 1 \to y = e^x - x - 1 + \cos x + \sin x$

   c) Ált. mo: $y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \xrightarrow{y(0)=1} c = \frac{1}{2}$

2. Feladat: Oldjuk meg a következő konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenleteket!

   a) $y'' + y = 0$

   b) $y'' - 5y' + 6y = 0$

   c) $y'' - y' - 6y = 0$

   d) $y'' + 4y' + 4y = 0$

   e) $3y'' + 2y' + y = 0$

   f) $y'' - y' - y = 0$

   g) $2y'' + 5y' - y = 0$

   h) $5y'' + y' + 3y = 0$

   Megoldás:

   Megoldás menete: felírjuk a DE-hez tartozó karakterisztikus egyenletet ($ay'' + by' + cy = 0 \to ax^2 + bx + c = 0$), majd attól függően, hogy mennyi a diszkrimináns ($b^2 - 4ac$), fel tudjuk írni az általános megoldást:

   (a) Ha a $D > 0$, akkor 2 valós gyöke van, λ_1 és λ_2, akkor a megoldás: $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

kovacskd@math.bme.hu

(b) Ha $D = 0$, akkor a két valós gyök egybeesik (λ), a megoldás: $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

(c) Ha $D < 0$, akkor két komplex gyök van, amik egymás konjugáltjai: $\alpha \pm i\beta$, ilyenkor a megoldás: $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

a) Karakterisztikus egyenlet: $x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ a diszkriminánsa negatív, tehát két komplex gyökünk van, $\pm i \Longrightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

b) Kar. egy: $x^2 - 5x + 6 = 0$, a diszkriminánsa $= 1 > 0$, tehát két valós gyökünk van, ezeket a másodfokú egyenlet megoldóképletével kiszámoljuk $\longrightarrow \lambda_{1,2} = 2; 3$, tehát a megoldás: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

c) Kar. egy: $x^2 - x - 6 = 0$, a diszkriminánsa $= 5 > 0$, a két gyök $\lambda_{1,2} = -2; 3$, tehát a megoldás: $y = y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

d) Kar. egy: $x^2 + 4x + 4 = 0$, a diszkrimánsa 0, tehát 1 valós megoldás van, a $\lambda = 2$, tehát a megoldás: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

e) Kar. egy: $3x^2 + 2x + 1 = 0$, a diszkriminánsa $= -8 < 0$, tehát két komplex gyöke van, a $-1 \pm i\sqrt{2}$, tehát a megoldás: $y = c_1 e^{-x} \cos \sqrt{2}x + c_2 e^{-x} \sin \sqrt{2}x$

f) Kar. egy: $x^2 - x - 1 = 0$, a diszkriminánsa $= 3 > 0$, tehát két valós gyöke van, az $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, a megoldás: $y = c_1 e^{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})x} + c_2 e^{(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})x}$.

g) Kar. egy: $2x^2 + 5x - 1 = 0$, a diszkriminánsa $= 29 > 0$, tehát két valós gyökünk van, a $-\dfrac{5}{4} \pm \dfrac{\sqrt{29}}{4}$, a megoldás: $y = c_1 e^{(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{29}}{4})x} + c_2 e^{(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{29}}{4})x}$.

h) Kar. egy: $5x^2 + x + 3 = 0$, a diszkriminánsa $= -59 < 0$, tehát két komplex gyökünk van, $-\dfrac{1}{10} \pm i \dfrac{\sqrt{59}}{10}$), a megoldás tehát: $y = c_1 e^{-\frac{1}{10}x} \cos \frac{\sqrt{59}}{10} x + c_2 e^{-\frac{1}{10}x} \sin \frac{\sqrt{59}}{10} x$