8. Feladatsor

Függvények III.

1. Feladat: Állapítsuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát! Vizsgáljuk meg folytonosságukat, és határozzuk meg aszimptotáik egyenletét!

   a) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\sqrt{x^4-1}$ c) $\dfrac{6(x^2-4)}{3x^2+8}$ d) $\dfrac{x^2-2x}{x-1}$

   Megoldás:

   a) A függvény ott nem értelmezhető, ahol a nevező 0, vagy a gyök alatt negatív szám van. $\sqrt{1-x^2} \neq 0 \longleftrightarrow x \neq -1; 1$; $0 \leq 1-x^2 \longleftrightarrow x^2 \leq 1$, tehát a függvény értelmezési tartománya a (-1;1) nyílt intervallum.ezen belül mindenhol folytonos a függvény.
   Vizsgáljuk meg az intervallum széleinél a határértéket: $\lim_{x\to -1+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = \infty$, tehát az $x = -1$ és $x = 1$ egyenesek a függvény függőleges aszimptotái.

   b) A függvény ott nem értelmezhető, ahol a gyök alatt negatív szám van $\longrightarrow$ a függvény a $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ halmazon értelmezhető.
   $\lim_{x\to -1+0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = 0$, ezért nincs függőleges aszimpt.
   $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ és $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, ezért nincs ferde aszimptota.

   c) $3x^2 + 8 \neq 0 \to$ ez mindig teljesül, ezért a függvény a valós számok halmazán végig értelmezhető és folytonos.
   $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, tehát a ferde aszimptota meredeksége 0, azaz egy vízszintes aszimptotánk lesz.
   $c = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty}(f(x) - mx) = 2$, azaz az y=2 a függvény vízszintes aszimptotája.

   d) Az $x = 1$ kivételében minden pontban értelmezhető és folytonos is a függvény.

   $\lim_{x\to 1-0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1+0} f(x) = -\infty$, tehát az $x = 2$ a függvény függőleges aszimptotája.

   $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{x-1} = 1$; $c = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x-1} = -1$, tehát a ferde aszimptota egyenlete $y = x - 1$.

 kovacskd@math.bme.hu

2. Feladat: Eleget tesznek-e az alábbi függvények a Rolle-tétel feltételeinek az adott intervallumon? Ha igen, adjunk meg egy c-t, ahol f'(c) = 0.

   a) $f(x) = 1 - |x| \quad [-1; 1]$ b) $f(x) = \sin x \quad [0; \pi]$

   Megoldás:

   Rolle: a függvény folytonos legyen az intervallumon, differenciálható legyen az intervallum belsejében (határokon nem kell), és az intervallum két végén felvett függvényérték egyenlő.

   a) $f(-1) = f(1) = 0$; f folytonos az intervallumon, viszont $x = 0$-ban nem differenciálható, így nem teljesül minden feltétel.

   b) $f(0) = f(\pi) = 0$, f folytonos az intervallumon, illetve differenciálható is, tehát teljesül minden feltétel.
   $f'(x) = \cos x$, az intervallumon belül a $c = \frac{\pi}{2}$ pontban lesz $= 0$.

3. Feladat: Ellenőrizzük a Lagrange-tétel feltételeit és konklúzióját az alábbi függvényekkel, a megadott intervallumokon!

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad [-1; 8]$ b) $f(x) = 3x^2 - 5 \quad [-2; 0]$

   Megoldás:

   Lagrange: a függvény folytonos legyen az intervallumon, differenciálható az intervallum belsejében (határokon nem kell) $\rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

   a) f nem differenciálható a 0-ban, tehát nem teljesülnek a feltételek, viszont van olyan c, amire igaz a konklúzió: $c = 1$.

   b) Teljesülnek a feltételek, ugyanis $f(x)$ folytonos és diffható az intervallumon $\rightarrow f'(c) = \dfrac{-5 - 7}{0 - (-2)} = -6$, $f'(x) = 6x$, tehát $c = -1$.

4. Feladat: A deriváltak segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk mely részhalmazán (szigorúan) monoton növekvők és melyeken (szigorúan) monoton csökkenőek!

   a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

   Megoldás:

   Ott szigorúan monoton nő a függvény, ahol $f'(x) > 0$, illetve ott szigorúan monoton csökken, ahol $f'(x) < 0$.

   a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = x(3x + 6)$

   1. tényező: $x \quad x > 0 \Rightarrow x$ pozitív, $\quad x < 0 \Rightarrow x$ negatív.

   2. tényező: $3x + 6 = 3(x + 2) \quad 3x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -2, \quad 3x + 6 < 0 \Leftrightarrow x < -2.$

   A szorzat előjele akkor pozitív, ha a tényezők előjele megegyezik (mindkettő + vagy mindkettő -), és negatív, ha eltérőek.

   $f'(x) > 0 \quad \text{ha} \quad x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, és $f'(x) < 0 \quad \text{ha} \quad x \in (-2, 0)$

$$\begin{cases} \text{szigorúan monoton növekvő:} & (-\infty,-2) \text{ és } (0,\infty), \\ \text{szigorúan monoton csökkenő:} & (-2,0). \end{cases}$$

b) $f'(x) = \frac{(1)(x^2+4)-x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$

A nevező $(x^2+4)^2 > 0$ minden valós x-re, tehát a derivált előjele megegyezik a számláló előjelével. A számláló felbontható: $4-x^2 = (2-x)(2+x)$

$f'(x) > 0 \quad \text{ha} \quad x \in (-2,2), \quad f'(x) < 0 \quad \text{ha} \quad x \in (-\infty;-2) \cup (2,\infty)$

5. Feladat: Magasabbrendű deriváltak segítségével vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek van-e szélsőértékük az $x_0 = 0$ pontban, és ha igen, milyen!

   a) $\cos x - 2x^2$ b) $\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!}$

   Megoldás:

   Ha $f^{(k)}(x_0) = 0, \quad (0 < k < n),$ de $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \longrightarrow$

   Ha n páros, akkor a függvénynek az x_0 helyen szélsőértéke van: szig. minimuma van, ha $f^{(n)}(x_0) > 0$, és szig. maximuma, ha $f^{(n)}(x_0) < 0$.
   Ha n páratlan, akkor a függvénynek az x_0 helyen nincs szélsőértéke, inflekciós pontja van.

   a) $f'(x) = -\sin x - 4x \to$ 0-ban $= 0$, $f''(x) = -\cos x - 4 \to$ 0-ban $= -5$, tehát van szélsőértéke a függvénynek a 0-ban, mégpedig maximuma.

   b) $f'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} \to$ 0-ban $= 0$, $f''(x) = -\sin x + x \to$ 0-ban $= 0$, $f'''(x) = -\cos x + 1 \to$ 0-ban $= 0$, $f^{(4)}(x) = \sin x \to$ 0-ban $= 0$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, ez már $x = 0$-ban 1 lesz, de mivel páratlanadik deriváltnál van az első nemnulla, ezért ez inflexiós pont, nem szélsőérték.

6. Feladat: Határozzuk meg az alábbi f(x) függvények szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékhelyeit a megadott intervallumon.

   a) $x^3 + 6x^2 - 15x + 3 \quad [-6;6]$ b) $x \cdot e^{-x} \quad [\frac{1}{2};\infty)$

   Megoldás:

   Vizsgáljuk meg a függvényt az intervallum végpontjaiban, valamint a deriváltfüggvény zérushelyein és szakadási helyein.

   a) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$, zérushelyei $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. Tehát szélsőérték lehet az $x_0 = -6$, $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 6$ pontokban. $f(-6) = 93$, $f(-5) = 103$, $f(1) = -5$, $f(6) = 345$, és f' negatív a $(-5,1)$ intervallumon. Tehát maximum van az $x_1 = -5$ és $x_3 = 6$ pontokban, minimum az $x_0 = -6$ és $x_2 = 1$ pontokban van. Abszolút maximum van az $x_3 = 6$, abszolút minimum az $x_2 = 1$ pontban.

   b) $f(x) = e^{-x}(1-x)$. Az f' zérushelye $x = 1$, ahol f' előjelet vált. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0,5) > 0$, tehát maximuma van f-nek az $x = 1$ pontban, minimuma nincs.

7. Feladat: Adott térfogatú egyenes hengerek közül melyiknek legkisebb a felszíne?

   Megoldás:

   Legyen a henger sugara r, magassága h. A térfogata $V = \pi r^2 h$, a felszíne $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. A térfogatból $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, így $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}, \quad r > 0$.

   Deriválva: $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{V}{2\pi}$ Mivel $S''(r) = 4\pi + \dfrac{4V}{r^3} > 0$, ez minimum. A magasság: $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$.

   Tehát a henger magassága megegyezik az alaplap átmérőjével.

8. Feladat: Az f fókusztávolságú lencsétől t távolságra lévő tárgy k képtávolsága kielégíti az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ összefüggést. Ha f adott, akkor mennyi a képtávolság és a tárgytávolság összegének infimuma és szuprémuma?

   Megoldás:

   Az $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$ egyenletből $\frac{1}{k} = \frac{1}{f} - \frac{1}{t} = \frac{t-f}{ft}$, így $k = \dfrac{ft}{t-f}$ és $S(t) = t + k = \frac{t^2}{t-f}, \quad t > f$; $S'(t) = \frac{t(t-2f)}{(t-f)^2} = 0 \Rightarrow t = 2f$, $S(2f) = \frac{(2f)^2}{2f-f} = 4f$

   $\lim_{t \to f^+} S(t) = \lim_{t \to \infty} S(t) = \infty \longrightarrow$ tehát $\inf S = 4f$, $\sup S = +\infty$.

   Azaz az összeg felülről nem korlátos, minimuma 4f.