7. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Határozzuk meg az alábbi elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását!

   a) $y' - \frac{2}{x}y = x^2 + 1$

   b) $y' - xy = x^3$

   c) $y' + y = e^{-x}$

   d) $xy' + 2y = x^4$

   e) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$

   f) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

   g) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$

   Megoldás:

   Először megoldjuk az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenletet, ami szétválasztható, majd a c konstans helyére egy $c(x)$ x-től függő kifejezést írunk, majd ezt az y-t és deriváltját az eredetibe visszahelyettesítve kiszámoljuk $c(x)$ értékét, így kapjuk meg a végső megoldást.

   a) $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2 + 1$, a hozzá tartozó homogén egyenlet: $Y' - \dfrac{2}{x}Y = 0$, ezt átrendezve megkapjuk a szétválasztható egyenletet: $Y' = \dfrac{dY}{dx} = \dfrac{2}{x}Y \rightarrow$ $\dfrac{dY}{Y} = 2\dfrac{dx}{x} \longrightarrow Y = cx^2 \Longrightarrow y = c(x)\cdot x^2,\ y' = c'(x)\cdot x^2 + c(x)\cdot 2x$, ezeket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítjük $\Longrightarrow$
   $c'(x)\cdot x^2 + c(x)\cdot 2x - \dfrac{2}{x}(c(x)\cdot x^2) = x^2 + 1 \rightarrow c'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, integráljuk:
   $c(x) = x - \dfrac{1}{x} + k \Longrightarrow y = (x - \dfrac{1}{x} + k)x^2 = x^3 - x + kx^2$

   b) homogén: $Y' - xY = 0 \rightarrow \dfrac{dY}{Y} = x \cdot dx \longrightarrow Y = ce^{\frac{x^2}{2}} \rightarrow y = c(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ alakú a megoldásunk. $y' = c'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + c(x)e^{\frac{x^2}{2}}x$, az eredetibe visszahelyettesítve: $c'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + c(x)e^{\frac{x^2}{2}}x - x\cdot c(x)e^{\frac{x^2}{2}} = x^3 \rightarrow c'(x) = x^3e^{-\frac{x^2}{2}}$, integrálás után: $c(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2+2)+k \Longrightarrow y = ke^{\frac{x^2}{2}} - (x^2+2)$

   c) homogén: $Y' + Y = 0 \longrightarrow Y = ce^{-x} \rightarrow y = c(x)e^{-x},\ y' = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$, eredetibe helyettesítve: $c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = e^{-x} \rightarrow c'(x) = 1 \longrightarrow c(x) = x + k \Longrightarrow y = (x+k)e^{-x}$

kovacskd@math.bme.hu

d) homogén: $xY' + 2Y = 0 \to \dfrac{dY}{Y} = -2\dfrac{dx}{x} \to Y = cx^{-2} \longrightarrow y = c(x)x^{-2},\ y' = c'(x)x^{-2} - 2c(x)x^{-3} \Longrightarrow$ eredetibe behelyettesítve: $x(c'(x)x^{-2} - 2c(x)x^{-3}) + 2c(x)x^{-2} = x^4 \to c'(x)x^{-1} - 2c(x)x^{-2} + 2c(x)x^{-2} = x^4 \longrightarrow c'(x) = x^5 \Longrightarrow c(x) = \dfrac{x^6}{6} + k \Longrightarrow y = (\dfrac{x^6}{6} + k)x^{-2} = \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{k}{x^2}$

e) homogén: $Y' + Y\cos x = 0 \to \dfrac{dY}{Y} = -\cos x dx \to \ln Y = -\sin x + c \longrightarrow Y = c_1 e^{-\sin x}$, azaz $y = c(x)e^{-\sin x},\ y' = c'(x)e^{-\sin x} - c(x)e^{-\sin x}\cos x \Longrightarrow$ eredetibe: $c'(x)e^{-\sin x} - c(x)e^{-\sin x}\cos x + c(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x \cos x \to c'(x) = \sin x \cos x e^{\sin x} \to c(x) = -e^{-\sin x}(\sin x + 1) + k$
$\Longrightarrow y = ke^{-\sin x} + \sin x - 1$

f) homogén: $Y' + 2xY = 0 \to \dfrac{dY}{Y} = -2x dx \to Y = ce^{-x^2} \longrightarrow y = c(x)e^{-x^2},\ y' = c'(x)e^{-x^2} - c(x)e^{-x^2}2x$

Eredetibe visszahelyettesítve: $c'(x)e^{-x^2} - c(x)e^{-x^2}2x + 2xc(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \to c'(x) = 2x \Longrightarrow c(x) = x^2 + k \Longrightarrow y = (x^2 + k)e^{-x^2}$

g) homogén: $xY' - (x+1)Y = 0 \to \dfrac{dY}{Y} = \dfrac{x+1}{x}dx = (1 + \frac{1}{x})dx \to \ln Y = x + \ln x + c_1 \longrightarrow Y = cxe^x \Longrightarrow y = c(x)xe^x,\ y' = c'(x)xe^x + c(x)e^x(x+1)$, eredetibe behelyettesítve: $x(c'(x)xe^x + c(x)e^x(x+1)) - (x+1)c(x)xe^x = x^2 - x^3 \to c'(x)x^2e^x = x^2 - x^3 \longrightarrow c'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \longrightarrow c(x) = e^{-x}x + k \Longrightarrow y = (e^{-x}x + k)xe^x = x^2 + kxe^x$

2. Feladat: Határozzuk meg az alábbi elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását, illetőleg a feladatokban megadott kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldását!

   a) $xy' - y = x^3 + 1; \qquad y(2) = 5$

   b) $y' + y\cos x = \sin x \cos x; \qquad y(0) = 1$

   c) $y' + 2xy = x + e^{-x^2}; \qquad y(1) = 1$

   Megoldás:

   a) Az általános megoldás: $y = cx + \dfrac{x^3}{2} - 1$. Ha x helyére 0-t írunk, akkor a függvényérték mindenképp -1 lesz, így nincs olyan partikuláris megoldás, ami eleget tenne a kezdeti feltételnek.

   b) Az általános megoldás ugyanaz, mint az 1. e) feladatban: $y = ke^{-\sin x} + \sin x - 1$, ebből $x = 0$ és $y = 1$ behelyettesítéssel $k = 2$.

   c) Az általános megoldás: $y = ce^{-x^2} + e^{-x^2}x + \dfrac{1}{2}$, behelyettesítve az $x = 1$ és $y = 1$ értékeket $c = -\dfrac{1}{2}$.