7. Feladatsor

Függvények II.

1. Feladat: Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!

$$\sinh 1 \quad \sinh(-1) \quad \sinh 1 + \cosh 1 \quad \tanh 1 \quad \text{cth } 1$$

Megoldás:

$\sinh 1 = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2} = \dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2e} \approx 1.1752$

$\sinh(-1) = \dfrac{e^-1 - e^1}{2} = \dfrac{1}{2e} - \dfrac{e}{2} \approx -1.1752$

$\sinh 1 + \cosh 1 = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2} + \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2} = \dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2e} + \dfrac{e}{2} + \dfrac{1}{2e} = e$

$\tanh 1 = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{e^1 + e^{-1}} = \dfrac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \approx 0.7616$

$\text{cth } 1 = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{e^2 + 1}{e^2 - 1} \approx 1.3130$

2. Feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\text{arsh } z = \text{arch } z$$

Megoldás:

Átírjuk az egyenletet: $\text{arsh } z = \text{arch } z \longleftrightarrow \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \longrightarrow$ csak akkor igaz, ha $x^2 + 1 = x^2 - 1$, ez sosem igaz, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

3. Feladat: Ellenőrizzük, hogy az alábbi határértékek $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusúak-e, és számítsuk ki a határértékeket a L'Hospital szabály segítségével!

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x \ln x}{e^x + x}$

d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$

e) $\lim_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{1+\ln(\sin x)}$

f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}}$

Megoldás:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2}$, mivel $\dfrac{\sin x}{x}$ határértéke 1.

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x \ln x}{e^x + x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}}{e^x + 1}$, mivel az $e^x \ln x$ tagot semennyi deriválással sem tudjuk eliminálni, ezért a határérték mindenképp ∞ lesz.

d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x} \overset{\text{L'H}}{=} \dfrac{2/(3\sqrt[3]{(1+2x)^2})}{1/(2\sqrt{2+x})+1} = \dfrac{4}{9}$

e) $\lim_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{1+\ln(\sin x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{1/x}{\cos x/\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{2/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0$

4. Feladat: Számítsuk ki az alábbi $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 vagy 1^∞ típusú határértékeket!

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$

b) $\lim_{x\to -\infty} e^x \cdot \ln(-x)$

c) $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot x^\epsilon \quad (\epsilon \in R)$

d) $\lim_{x\to 0} (\sin x)^x$

e) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

f) $\lim_{x\to +0} (1+x)^{\ln x}$

Megoldás:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} \overset{\text{L'H}}{=}$
$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{xe^x + e^x + e^x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to -\infty} e^x \cdot \ln(-x) = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{e^{-x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to -\infty} \dfrac{-\frac{1}{-x}}{-e^{-x}} = 0$

c) $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot x^\epsilon = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^\epsilon}{e^x}$

Ha $\varepsilon \le 0$, akkor a határérték nyilvánvalóan 0. Egyébként pedig használjuk a L'Hospital-szabályt: $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^\varepsilon}{e^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{e^x}$

Ha $\varepsilon - 1 \le 0$, akkor ez határérték 0, ha nem, még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt: $\lim_{x\to -\infty} \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{e^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)x^{\varepsilon-2}}{e^x}$

Ha $\varepsilon - 2 \le 0$, akkor ez határérték 0, ha nem, hasonlóképpen folytatjuk az eljárást, míg végül $\varepsilon - k \le 0$ nem teljesül $\longrightarrow$ a határérték 0.

d) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\ln\sin x} = e^0 = 1$

e) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$

f) $\lim_{x\to +0}(1+x)^{\ln x} = \lim_{x\to +0} e^{\ln x\ln(1+x)} = e^0 = 1$