6. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Oldjuk meg az alábbi szétválasztható változójú, vagy ilyenre visszavezethető elsőrendű differenciálegyenleteket!

a) $(2x+1)y' - 3y = 0$

b) $(x^2 - 2x)y' = 2(x-1)(y+1)$

c) $2y^2 + 3y = 3xy'$

d) $(1+x^2)y' + (1+y^2) = 0$

e) $(x\cos y)y' + \sin y = 0$

f)* $2xyy' = 2y^2 - x^2$

g) $\sqrt{1+x^2}y' - \sqrt{1-y^2} = 0$

h)* $(y^2 + x^2 e^{\frac{x}{y}})y' = (y^2 + xy)e^{\frac{x}{y}}$

Megoldás:

a) Az egyenletet átalakítjuk, hogy a bal oldalon csak az y' maradjon: $(2x+1)y' = 3y \to y' = 3\dfrac{y}{2x+1}$, átírjuk az y'-t $\dfrac{dy}{dx}$-re, majd rendezünk: $y' = \dfrac{dy}{dx} = 3\dfrac{y}{2x+1} \to \dfrac{dy}{y} = 3\dfrac{dx}{2x+1}$, ezután integráljuk mindkét oldalt: $\int \frac{dy}{y} = 3\int \frac{dx}{2x+1}$. Integrálás után az alábbi egyenletet kapjuk:
$\ln|y| = \frac{3}{2}\ln(2x+1) + \ln c = \frac{3}{2}\ln c(2x+1) \to \ln y^2 = \ln c_1(2x+1)^3 \Longrightarrow$
$y^2 = c_1(2x+1)^3 \quad (y = \sqrt{c_1(2x+1)^3})$

b) $(x^2-2x)y' = 2(x-1)(y+1) \to y' = \dfrac{dy}{dx} = 2(x-1)\dfrac{(y+1)}{x^2-2x} \to \dfrac{dy}{2y+2} = \dfrac{2x-2}{x^2-2x}dx = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2}\right)dx$, ezután integráljuk mindkét oldalt: $\int \dfrac{1}{2y+2}dy = \int \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2}\right)dx = \int \dfrac{1}{x}dx - \int \dfrac{1}{x-2}dx \longrightarrow$
$\ln|y+1| = \ln|x-2| + \ln|x| + \ln c_1 = \ln c_1 x(x-2) \Longrightarrow y = c_1(x^2-2x) - 1$

c) $2y^2 + 3y = 3xy' \to y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^2+3y}{3x} \to \dfrac{dy}{y(2y+3)} = \dfrac{dx}{3x}$, integráljuk mindkét oldalt: $\int \dfrac{1}{y(2y+3)}dy = \int \dfrac{1}{3x}dx \longrightarrow$

 kovacskd@math.bme.hu

$\frac{1}{3}\ln|y| - \frac{1}{3}\ln|2y+3| + \ln c_1 = \frac{1}{3}\ln|x| \to \ln c_2 \frac{y}{2y+3} = \ln|x| \Longrightarrow$
$x = c_2 \dfrac{y}{2y+3} \to c_2 y = x(2y+3) \to y = \dfrac{-3x}{2x - c_2}$

d) $(1+x^2)y' + (1+y^2) = 0 \to y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(1+y^2)}{1+x^2} \to \dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{-dx}{1+x^2}$,
integráljuk mindkét oldalt: $\int \dfrac{1}{1+y^2} dy = -\int \dfrac{1}{1+x^2} dx \longrightarrow$
$\arctan y = -\arctan x + c \to \arctan x + \arctan y = c \Longrightarrow x + y = c_1(1 - xy)$,
átrendezve a végeredmény: $y = \dfrac{c_1 - x}{1 + c_1 x}$

e) $(x\cos y)y' + \sin y = 0 \to y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x} \cdot \tan y \to \dfrac{dy}{\tan y} = -\dfrac{dx}{x}$,
integráljuk mindkét oldalt: $\int \dfrac{dy}{\tan y} = -\int \dfrac{dx}{x} \longrightarrow$
$\ln|\sin y| = \ln|c\frac{1}{x}| \Longrightarrow x\sin y = c \to y = \arcsin \dfrac{c}{x}$

g) $\sqrt{1+x^2}y' - \sqrt{1-y^2} = 0 \to y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1+x^2}} \to \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$
$\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, integráljuk mindkét oldalt: $\int \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \longrightarrow$
$\arcsin y = \mathrm{arsh}\ x + c \Longrightarrow y = \sin(\mathrm{arsh}\ x + c)$

2. Feladat: Határozzuk meg az alábbi szétválasztható változójú, vagy ilyenre visszavezethető elsőrendű differenciálegyenletek általános megoldását, valamint az adott feladatban megadott kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldást!
   a) $xy' + y = y^2; \qquad y(2) = -3$
   b) $y' + 1 - e^{-y} = 0; \qquad y(0) = \ln 2$
   c) $\frac{y}{x+1}y' - \frac{x}{y+1} = 0; \qquad y(1) = 1$
   d)* $(2x^3 + 3xy^2)y' = x^2 y + 2y^3; \qquad y(1) = \sqrt{3}$
   e) $y\sqrt{1-x^2}y' + x\sqrt{1-y^2} = 0; \qquad y(0) = 1$
   f)* $(y\sin\frac{x}{y} - \cos\frac{x}{y})y' + y\cos\frac{x}{y} = 0; \qquad y(\pi) = 2$

   Megoldás:

   a) $xy' + y = y^2 \to y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(y-1)}{x} \to \dfrac{dy}{y(y-1)} = \left(-\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y-1}\right) dy =$
   $\dfrac{dx}{x}$, integráljuk mindkét oldalt: $\int \left(-\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y-1}\right) dy = \int \dfrac{dx}{x} \longrightarrow$

$\ln|c_1x| = -\ln|y| + \ln|y-1| = \ln|\frac{y-1}{y}| \to c_1x = \frac{y-1}{y} \Longrightarrow y = \frac{1}{1-cx}$
$x = 2, y = -3 \to$ behelyettesítjük a megoldásba, így kapjuk meg a c értéket az adott partikuláris megoldáshoz: $c = \frac{2}{3} \longrightarrow y = \frac{3}{3-2x}$

b) $y' + 1 - e^{-y} = 0 \to y' = \frac{dy}{dx} = e^{-y} - 1 \to \frac{dy}{e^{-y}-1} = dx$, integráljuk mindkét oldalt: $\int dx = \int \frac{dy}{e^{-y}-1} = -\int \frac{d(1-e^y)}{1-e^y} \longrightarrow$
$-x + c = -\ln(1-e^y) \to 1 - e^y = c_1e^{-x} \to e^y = 1 - c_1e^{-x} \Longrightarrow y = \ln(1 - c_1e^{-x})$. Partikuláris: $x = 0, y = \ln 2 \to c_1 = 1 \longrightarrow y = \ln(1-e^{-x})$

c) $\frac{y}{x+1}y' - \frac{x}{y+1} = 0 \to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x(x+1)}{y(y+1)} \to (y^2+y)dy = (x^2+x)dx$, integráljuk mindkét oldalt és konstanssal (6) felszorzunk, hogy ne legyenek tört együtthatók (elhagyható) $\Longrightarrow 2(y^3 - x^3) + 3(y^2 - x^2) = c$.
Partikuláris mo: $x = 1, y = 1 \to c = 0 \longrightarrow 2(y^3 - x^3) + 3(y^2 - x^2) = 0$

e) $y\sqrt{1-x^2}y' + x\sqrt{1-y^2} = 0 \to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}} \to \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, integráljuk mindkét oldalt $\longrightarrow$
$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = c$, a partikuláris megoldás: $c = 1$.