6. Feladatsor

Függvények határértéke, folytonossága

1. Feladat: Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket!

a) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{-4x^3+x^2-1}{x^2+x-1}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

d) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x+1}{x^2-2}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^7+5x^6+x^3}{x^7+2x^3}$

f) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

Megoldás:

a) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = \lim_{x\to 4} \dfrac{x+4}{x} = \dfrac{8}{4} = 2$

b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{-4x^3+x^2-1}{x^2+x-1} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{-4x+1-1/x^2}{1+1/x-1/x^2} = \infty$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x+5}{x+1} = \dfrac{6}{2} = 3$

d) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x+1}{x^2-2} = \lim_{x\to \infty} \dfrac{2/x+1/x^2}{1-2/x^2} = 0$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^7+5x^6+x^3}{x^7+2x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^4+5x^3+1}{x^4+2} = \dfrac{1}{2}$

f) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x\to \infty} \dfrac{1+\sqrt[6]{1/x}+\sqrt[4]{1/x}}{\sqrt{2+1/x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. Feladat: Vizsgáljuk meg, hogy hol folytonosak az alábbi függvények. Ha a függvényeknek szakadási helyeik vannak, akkor állapítsuk meg azok típusát!

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

b) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

d) $f(x) = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$

e) $f(x) = \dfrac{5x^2-3x}{2x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$

 kovacskd@math.bme.hu

Megoldás:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+2)} = \dfrac{x-1}{x+2} \rightarrow x \neq -2; -3$, tehát ezeken a pontokon kívül folytonos a függvény.

$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \dfrac{x-1}{x+2} = 4$, tehát az $x = -3$ pontban elsőfajú, megszüntethető szakadása van a függvénynek.

$\lim_{x\to -2-0} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} = \infty$, $\lim_{x\to -2+0} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} = -\infty$, tehát az $x = -2$ pontban másodfajú, végtelen szakadása van a függvénynek.

b) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}} \rightarrow$ az $x \neq -1$ helyeken folytonos. Az $x = -1$ helyen:

$\lim_{x\to -1-0} 3^{\frac{1}{x+1}} = 1$, $\lim_{x\to -1+0} 3^{\frac{1}{x+1}} = \infty$, tehát másodfajú, végtelen szakadása van a függvénynek.

c) $\cos x \neq 1$, tehát $x \neq 2k\pi$ helyeken folytonos a függvény. Az $x = 2k\pi$ helyeken:

$\lim_{x\to 2k\pi} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 2k\pi} 1 + \cos x = 2$, tehát ezekben a pontokban elsőfajú, megszüntethető szakadása van a függvénynek.

d) Az abszolútérték definíciója alapján:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{ha } x > -2, \\ -(x+2), & \text{ha } x < -2. \end{cases}$$

Ezért:

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{x+2}{x+2} = x+1, & \text{ha } x > -2, \\ x + \dfrac{x+2}{-(x+2)} = x-1, & \text{ha } x < -2. \end{cases}$$

Az $x = -2$ pontban nincs értelmezve a függvény, de azon kívül mindenütt folytonos. Az $x = -2$ helyen: $\lim_{x\to -2-0} f(x) = \lim_{x\to -2-0} x - 1 = -3$, $\lim_{x\to -2+0} x + 1 = -1$, tehát az $x = -2$ helyen elsőfajú, ugrás szakadása van a függvénynek.

e) Az $x = 0$ kivételével mindenhol értelmezett a függvény. Az $x = 0$-ban:

$\lim_{x\to 0} \dfrac{5x^2-3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{5x-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$, tehát elsőfajú, megszüntethető szakadása van a függvénynek.

f) Ahol a nevező 0, ott nem folytonos a függvény: $\sin 2x = 0 \longleftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$, tehát ezekben a pontokban van szakadás. A szakadás másodfajú, végtelen szakadás, ugyanis $\lim_{x\to (\frac{k\pi}{2})^-} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to (\frac{k\pi}{2})^+} f(x) = \mp\infty$.

3. Feladat: Határozzuk meg - ha lehetséges — az a és b paraméterek értékét úgy, hogy a következő függvények mindenütt folytonosak legyenek!

$$f_1(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ a, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & \text{ha } 0 < x; \\ -x, & \text{ha } x \leq 0, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{ha } x \leq 0; \\ ax + b, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \leq x. \end{cases}$$

Megoldás:

a) Akkor lesz folytonos az $f_1(x)$, ha $x = 0$-ban megszüntethető szakadása van a függvénynek, és a a pontbeli limesz értéke.
$\lim_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$, tehát $a = 0$ esetén lesz a függvény mindenhol folytonos.

b) $f_2(x)$ akkor lesz folytonos, ha $x = 0$-ban a bal és a jobb oldali határérték megegyezik.
$\lim_{x\to 0-0} f_2(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+0} f_2(x) = 1$, tehát semmilyen a esetén sem lesz folytonos a függvény.

c) $f_3(x)$ akkor lesz folytonos, ha $x = 0$-ban és $x = 1$-ben a bal és a jobb oldali határértékek megegyeznek.
$\lim_{x\to 0-0} f_3(x) = \lim_{x\to 0+0} f_3(x) = -1$, ennek kell lennie a b értékének.
$\lim_{x\to 1-0} f_3(x) = \lim_{x\to 1+0} f_3(x) = 1$, ez egyenlő az $a \cdot 1 - 1$-el, tehát $a = 2 \longrightarrow (a, b) = (2, 1)$ esetén lesz folytonos a függvény.