

## 10. Feladatsor

### Megoldások

1. Feladat: Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi állandó együtthatós lineáris differenciálegyenleteket a megadott kezdeti feltételekkel!
- a)  $y'' + 2y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 1$   
 b)  $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}$ ,  $y(0) = y'(0) = 3$   
 c)  $y''' + y = 1$ ,  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

*Megoldás:*

A megoldáshoz vesszük a differenciálegyenlet Laplace-transzformáltját, majd a végeredményt vissza transzformáljuk.

a)  $\mathcal{L}(y'') = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 1$ ;  $\mathcal{L}(y') = pY - y(0) = pY$ ; illetve definíció szerint  $\mathcal{L}(y) = Y \rightarrow$  a transzformált egyenlet:

$$(p^2 + 2p + 2)Y = 1 \rightarrow Y = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}, \text{ mivel } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin x \text{ és } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) = e^{-x}, \text{ ezért } y = e^{-x} \sin x.$$

b)  $\mathcal{L}(y'') = p^2Y - 3p - 3$ ;  $\mathcal{L}(y') = pY - 3$ ;  $\mathcal{L}(6e^{-x}) = \frac{6}{p+1}$ ; illetve definíció szerint  $\mathcal{L}(y) = Y \rightarrow$  a transzformált egyenlet:

$$p^2Y - 3p - 3 - 3(pY - 3) + 2Y = \frac{6}{p+1} \rightarrow$$

$$(p^2 - 3p + 2)Y = \frac{6}{p+1} + 3p - 6 \xrightarrow{p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2)}$$

$$Y = \frac{\frac{6}{p+1} + 3p - 6}{(p-1)(p-2)} = \frac{3p(p-1)}{(p+1)(p-1)(p-2)} = \frac{3p}{(p+1)(p-2)},$$

ezt parciális törtekre bontással felbontjuk:  $Y = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p-2} \implies$

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-x} + 2e^{2x}$$

c)  $\mathcal{L}(y''') = p^3Y - p^2 \cdot 0 - p \cdot 0 - 0 = p^3Y$ ;  $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$ ; illetve definíció szerint

$$\mathcal{L}(y) = Y \rightarrow \text{a transzformált egyenlet: } p^3Y + Y = \frac{1}{p} \rightarrow Y = \frac{1}{p(p^3 + 1)},$$

$$\text{felbontjuk: } \frac{1}{p(p^3 + 1)} = \frac{1}{p(p+1)(p^2 - p + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \frac{1}{p+1} + \frac{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}}{p^2 - p + 1} =$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{3} \frac{1}{p+1} - \frac{2}{3} \frac{p - \frac{1}{2}}{(p - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \rightarrow$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 1 - \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

2. Feladat: Oldjuk meg az alábbi szétválasztható változójú, vagy ilyenre visszavezethető elsőrendű differenciálegyenleteket!

a)  $y' \sin y \cos x + \cos y \sin x = 0$

b)  $xy^2y' = x^3 + y^3$

*Megoldás:*

a) Átrendezve az egyenletet:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{-\cos y \sin x}{\sin y \cos x} \rightarrow \tan y \, dy = -\tan x \, dx$ ,  
integrálás után:  $-\ln|\cos y| = \ln|\cos x| + c \rightarrow c = \cos y \cos x \implies y = \arccos \frac{c}{\cos x}$

b) Átrendezve:  $y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$ , meg lehet oldani úgy is, hogy a homogén részt megoldjuk és onnan, vagy:

Legyen  $v = \frac{y}{x} \rightarrow y = vx$ ,  $y' = v + xv' \rightarrow x(v^2x^2)(v + xv') = x^3 + v^3x^3 \rightarrow$   
 $v^3 + xv^2v' = 1 + v^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = v' = \frac{1}{xv^2} \rightarrow v^2 \, dv = \frac{dx}{x}$ , integráljuk mindkét  
oldalt:  $\frac{v^3}{3} = \ln|x| + c \rightarrow v = \sqrt[3]{3 \ln|x| + c} \implies y = vx = x \sqrt[3]{3 \ln|x| + c}$

3. Feladat: Határozzuk meg az alábbi elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását, illetve a megadott kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldását.

a)  $xy' + 2y = x^4$

b)  $y' + y \tan x = \sin 2x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

*Megoldás:*

a) A homogén részt megoldjuk:  $xY' + 2Y = 0 \rightarrow \frac{dY}{Y} = -2\frac{dx}{x} \rightarrow Y = cx^{-2} \rightarrow y = c(x)x^{-2}$ ,  $y' = c'(x)x^{-2} - 2c(x)x^{-3} \implies$  eredetibe behelyettesítve:

$$x(c'(x)x^{-2} - 2c(x)x^{-3}) + 2c(x)x^{-2} = x^4 \rightarrow c'(x)x^{-1} - 2c(x)x^{-2} + 2c(x)x^{-2} = x^4 \rightarrow c'(x) = x^5 \implies c(x) = \frac{x^6}{6} + k \implies y = \left(\frac{x^6}{6} + k\right)x^{-2} = \frac{1}{6}x^4 + \frac{k}{x^2}$$

b) Megoldjuk a homogén részt:  $Y' + Y \tan x = 0 \rightarrow \frac{dY}{Y} = -Y \tan x \rightarrow \frac{dY}{Y} = -\tan x \, dx$ , integráljuk mindkét oldalt, innen:  $Y = c \cdot \cos x \rightarrow y = c(x) \cdot \cos x$ ,  $y' = c'(x) \cos x - c(x) \sin x$ , visszahelyettesítve az eredetibe:

$$c'(x) \cos x - c(x) \sin x + c(x) \cos x \tan x = \sin 2x \rightarrow c'(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x} = 2 \sin x$$

$$c(x) = \int c'(x) = -2 \cos x + k \rightarrow y = (-2 \cos x + k) \cos x$$

A partikuláris megoldás:  $c = 3$ .

4. Feladat: Oldjuk meg a következő konstanssegűtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenleteket!

a)  $y'' + 2y' - 3y = 0$

b)  $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

c)  $y'' + 9y = 18 \cos 3x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$

*Megoldás:*

a) Karakterisztikus egyenlet:  $x^2 + 2x - 3 = 0$ , a diszkrimináns  $> 0$ , ezért két valós megoldása van:  $\lambda_{1,2} = -3; 1$ , tehát a megoldás:  $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$

b) A homogén rész kar. egyenlete:  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , a diszkrimináns  $> 0$ , ezért két valós megoldása van:  $\lambda_{1,2} = 1; 2$ , tehát a homogén rész megoldása:  $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ .

Ezután keresünk a jobb oldalnak megfelelő alakú próbafüggvényt:  $Ae^{2x} + B$  lenne, de ez rezonál a homogén megoldás második tagjával, ezért  $y_p = Axe^{2x} + B$  a próbafüggvényünk.

$y'_p = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$ ,  $y''_p = 2Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$ , visszahelyettesítjük az eredetibe ezeket:

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 3(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 2(Axe^{2x} + B) = 3e^{2x} \rightarrow Ae^{2x} + 2B = 3e^{2x} \implies A = 3, B = 0 \rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$$

c) A homogén rész kar. egyenlete:  $x^2 + 9 = 0$ , ennek két komplex gyöke van,  $\pm 3i$ , tehát  $y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ . A próbafüggvény  $A \cos 3x + B \sin 3x + C$  lenne (cos és sin esetén mindig be kell venni a másikat is!), de ezek rezonálnak a homogén megoldás tagjaival, tehát a próbafüggvény:  $y_p = Ax \cos 3x + Bx \sin 3x + C$

$y'_p = A \cos 3x - 3Ax \sin 3x + B \sin 3x + 3Bx \cos 3x$ ,  $y''_p = -6A \sin 3x - 9Ax \cos 3x + 6B \cos 3x - 9Bx \sin 3x$ , visszahelyettesítjük:

$$-6A \sin 3x - 9Ax \cos 3x + 6B \cos 3x - 9Bx \sin 3x + 9(Ax \cos 3x + B) = 18 \cos 3x \rightarrow 6B \cos 3x - 6A \sin 3x = 18 \cos 3x, \text{ tehát } A = 0, B = 3 \implies y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + 3x \sin 3x$$

A partikuláris megoldás:  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ .

5. Feladat: Az alábbi feladatokban felírt differenciálegyenletekről állapítsuk meg, hogy egzakt-e vagy egzakttá tehető-e; ha igen, akkor oldjuk meg!

a)  $(e^x \sin y - e^y \sin x) + (e^x \cos y + e^y \cos x)y' = 0$ ,  $y(0) = 0$

b)  $\frac{y \sin x - 1}{\cos x} + y' = 0$

*Megoldás:*

a) A DE egzakt, tehát a megoldás  $u(x, y) = c$ .

$u = \int e^x \sin y - e^y \sin x dx = e^x \sin y + e^y \cos x + c(y)$ ,  $u'_y = Q \rightarrow e^x \cos y + e^y \cos y + c'(y) = e^x \cos y + e^y \cos x$ , tehát  $c'(y) = c(y) = 0$ , azaz a megoldás:  $e^x \sin y + e^y \cos x = c$ .

A partikuláris megoldás:  $c = 1$ .

b) A DE nem egzakt, de van olyan multiplikátor függvény, ami azzá teszi:

$M(x) = \frac{1}{\cos x} \rightarrow$  Az általános megoldás, miután beszoroztuk a DE-t és

megoldottuk az így kapott egzakt egyenletet:  $\tan x - y \frac{1}{\cos x} = c$ .