9. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Oldjuk meg a következő konstansegyütthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenleteket próbafüggvény-módszerrel!

   a) $4y'' + y = 85(e^{-x} - e^{2x})$ b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + 4x$

   Megoldás:

   Hasonlóan a korábbi inhomogén egyenletek megoldásához, itt is azzal kezdjük a megoldást, hogy megoldjuk a hozzá tartozó homogén egyenletet, majd ebből haladunk tovább.

   a) A hozzátartozó homogén DE karakterisztikus egyenlete: $4x^2 + 1 = 0$, ennek két komplex gyöke van, a $\pm\dfrac{1}{2}i$, így a homogén rész megoldása: $Y = c_1 \cos\frac{x}{2} + c_2 \sin\frac{x}{2}$.

   Az eredeti egyenlet megoldásához vegyünk egy olyan próbafüggvényt, aminek az alakja ugyanolyan, mint a jobb oldalé, csak az együtthatók helyett konstans változókat írunk: $y_p = Ae^{-x} + Be^{2x}$, ezt lederiváljuk kétszer, és behelyettesítjük az eredeti egyenletbe: $y_p' = -Ae^{-x} + 2Be^{2x}$, $y_p'' = Ae^{-x} + 4Be^{2x} \longrightarrow 4(Ae^{-x} + 4Be^{2x}) + Ae^{-x} + Be^{2x} = 85e^{-x} - 85e^{2x}$

   $\Longrightarrow$ ebből megkapjuk, hogy $A = 17$ és $B = -5$. Az eredeti inhomogén DE megoldását úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk a homogén DE megoldását a próbafüggvénnyel: $y = c_1 \cos\frac{x}{2} + c_2 \sin\frac{x}{2} + 17e^{-x} - 5e^{2x}$

   b) A homogén rész megoldása: $Y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

   A próbafüggvény a jobb oldal alapján az $Ae^{2x} + Bx + C$ lenne, de ennek az első tagja ugyanolyan alakú, mint a homogén megoldás első tagja, ilyenkor azt mondjuk, hogy rezonálnak, és a próbafüggvényt beszorozzuk x-el. Viszont így a homogén megoldás második tagjával rezonálna, tehát végül az $y_p = Ax^2e^{2x} + Bx + C$ próbafüggvényt használjuk.

   $y_p' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x} + B$, $y_p'' = 4Ax^2e^{2x} + 8Axe^{2x} + 2Ae^{2x}$, ezeket visszahelyettesítjük az eredetibe, egyszerűsítés után az alábbi egyenlet jön ki: $2Ae^{2x} + 4Bx - 4B + 4C = e^{2x} + 4x$, ebből $A = \dfrac{1}{2}$, $B = 1$, $C = 1$, tehát az általános megoldás: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2e^{2x} + x + 1$.

2. Feladat: Az alábbi feladatokban felírt differenciálegyenletekről állapítsuk meg, hogy egzakt-e vagy egzakttá tehető-e; ha igen, akkor oldjuk meg!

   a) $2x + 2\sin y + (2x\cos y - \sin y)y' = 0$

kovacskd@math.bme.hu

b) $(1-xy)+(xy-x^2)y'=0$

c) $\cos x - e^{-x}\sin y + (e^{-x}\cos y)y' = 0$

d) $\ln(y^2+1)+\dfrac{2y(x-1)}{y^2+1}y'=0$

e) $3x^2+6xy^2+(6x^2y+4y^3)y'=0$

f) $y+(ye^x-1)y'=0$

Megoldás:

Akkor egzakt egy DE, ha $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ esetén van olyan $u(x,y)$ függvény, hogy $P=u'_x$ és $Q=u'_y$, ilyenkor a megoldás $u(x,y)=c$. Ezt úgy tudjuk ellenőrizni, hogy ha egzakt, akkor $P'_y=Q'_x$.

Van, hogy csak azután lesz egzakt egy DE, hogy egy ún. multiplikátor függvénnyel beszorozzuk. Ha $\dfrac{P'_y-Q'_x}{Q}$ csak x-től függ vagy $\dfrac{Q'_x-P'_y}{P}$ csak y-tól, akkor létezik ilyen multiplikátor függvény, aminek logaritmusa a fenti kifejezések integrálásával kapható meg (nyilván azt integráljuk, amelyikre igaz volt, hogy legfeljebb csak egy változótól függ).

a) $P'_y=2\cos y,\ Q'_x=2\cos y$, tehát egzakt a DE.

$u(x,y)=\int 2x+2\sin y\ dx = x^2+2x\sin y+c(y)$, mivel $u'_y=Q$, ezért $2x\cos y+c'(y)=2x\cos y-\sin y \Longrightarrow c'(y)=-\sin y \to c(y)=\cos y$

Az általános megoldás tehát: $u(x,y)=x^2+2x\sin y+\cos y$

b) $P'_y=-x,\ Q'_x=y-2x$, tehát a DE nem egzakt. Van-e multiplikátor függvény, amivel azzá tehető?

$\dfrac{P'_y-Q'_x}{Q}=\dfrac{x-y}{xy-x^2}=-\dfrac{1}{x}$, mivel csak x-től függ, ezért van megfelelő multiplikátor függvény. $\ln M(x)=\int -\frac{1}{x}dx=-\ln x+c$. A multiplikátor függvények közül választhatjuk bármelyiket, most válasszuk az egyszerűség kedvéért a $c=0$ esetet, így $\ln M(x)=\ln x^{-1}$, azaz $M(x)=\dfrac{1}{x} \longrightarrow$ ezzel szorozzuk be az eredeti egyenletet és nézzük meg, hogy valóban egzakt lett-e az egyenlet:

DE: $(\frac{1}{x}-y)+(y-x)y'=0$, itt az első tag y szerinti deriváltja -1, a második tag x szerinti deriváltja szintén -1, így valóban egzakt lett. Innentől az előző feladathoz hasonlóan oldjuk meg:

$u(x,y)=\int y-x\ dy=\dfrac{y^2}{2}-xy+c(x)\Longrightarrow -y+c'(x)=\dfrac{1}{x}-y\to$

$c'(x)=\dfrac{1}{x}\longrightarrow c(x)=\ln x \Longrightarrow$általános mo: $u(x,y)=\dfrac{y^2}{2}-xy+\ln x=c$

c) $P'_y=-e^{-x}\cos y,\ Q'_x=-e^{-x}\cos y$, tehát egzakt.

$u=\int \cos x-e^{-x}\sin y\ dx=\sin x+e^{-x}\sin y+c(y)\longrightarrow e^{-x}\cos y+c'(y)=e^{-x}\cos y$, tehát $c'(y)=c(y)=0\Longrightarrow u(x,y)=\sin x+e^{-x}\sin y=c$ a megoldás.

d) $P'_y = \dfrac{1}{y^2+1} \cdot 2y,\ Q'_x = \dfrac{2y}{y^2+1}$, tehát egzakt.

$u = \int \ln(y^2+1)dx = x\ln(y^2+1)+c(y) \longrightarrow \dfrac{x}{y^2+1} \cdot 2y + c'(y) = 2y\dfrac{x-1}{y^2+1} = \dfrac{2xy}{y^2+1} - \dfrac{1}{y^2+1} \to c'(y) = -\dfrac{1}{y^2+1} \to c(y) = -\ln|y^2+1| \Longrightarrow u(x,y) = x \cdot \ln(y^2+1) - \ln(y^2+1) = \quad (x-1)\cdot\ln(y^2+1) = c$ a megoldás.

e) $P'_y = 12xy,\ Q'_x = 12xy$, tehát egzakt a diffegy.

$u = \int 3x^2 + 6xy^2 dx = x^3 + 3x^2y^2 + c(y) \to u'_y = 6x^2y + c'(y) = 6x^2y + 4y^3 \to c'(y) = 4y^3 \longrightarrow c(y) = y^4 \Longrightarrow x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$ a megoldás.

f) $P'_y = 1,\ Q'_x = ye^x$, tehát nem egzakt, de azzá tehető, mivel $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = \dfrac{1-ye^x}{ye^x-1} = -1 \to \ln M(x) = \int -1dx = -x \to M(x) = e^{-x} \Longrightarrow$

Az egzakttá alakított DE: $ye^{-x} + (y - e^{-x})y' = 0$ (e^{-x} mindkét parciális derivált, tehát tényleg egzakt.)

$u = \int ye^{-x}dx = -ye^{-x} + c(y) \longrightarrow -e^{-x} + c'(y) = -e^{-x} + y \to$
$c'(y) = y \to c(y) = \dfrac{y^2}{2} \Longrightarrow -ye^{-x} + \dfrac{y^2}{2} = c$ a megoldás.

3. Feladat: Határozzuk meg az alábbi egzakt diferenciálegyenleteknek azt a partikuláris megoldását, amely eleget tesz a feladatban megadott kezdeti feltételnek.

   a) $2x + \cos y - (x\sin y)y' = 0, \quad y(1) = 0;$

   b) $2x\ln y + e^x y + (\frac{x^2}{y} + e^x)y' = 0, \quad y(0) = 2;$

   c) $3x^2y^2 - 2xy + (2x^3y - x^2)y' = 0, \quad y(1) = 2;$

   Megoldás:

   a) $u = \int 2x + \cos y\ dx = x^2 + x\cos y + c(y) \to u'_y = Q : -x\sin y + c'(y) = -x\sin y \longrightarrow c'(y) = c(y) = 0 \Longrightarrow$ általános megoldás:
   $u(x,y) = x^2 + x\cos y = c$, partikuláris megoldás: $1^2 + 1\cos 0 = c \to c = 2$

   b) $u = \int \frac{x^2}{y} + e^x\ dy = x^2\ln y + ye^x + c(x) \longrightarrow 2x\ln y + ye^x + c'(x) = 2x\ln y + e^x y \longrightarrow c(x) = 0 \Longrightarrow$ általános megoldás: $x^2\ln y + ye^x = c \to$ partikuláris megoldás: $2e^0 = 2 = c$

   c) $u = \int 3x^2y^2 - 2xy\ dx = x^3y^2 - x^2y + c(y) \longrightarrow 2x^3y - x^2 + c'(y) = Q \to c(y) = 0 \Longrightarrow$ általános megoldás: $x^3y^2 - x^2y = c \to$ partikuláris megoldás: $1^3 2^2 - 1^2 2 = 2 = c$