5. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Számítsuk a következő komplex integrálokat a zárt görbe mentén a Cauchy-féle integrálformulák segítségével!

   Megoldás: A Cauchy-integrálformulák segítségével számoljuk ki a görbe menti integrálokat (feltétel, hogy f reguláris legyen egy T halmazon, és z_0 beleessen ebbe a T halmazba, azaz f regularitási tartományába!):

   $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz \longleftrightarrow \oint_G \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$
   $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \longleftrightarrow \oint_G \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$

   a) $\oint_G \frac{2z-1}{z^2-z}\, dz$; G az 1 középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kör:

   G és a belseje is benne van a regularitási tartományban, $f(z) = \frac{2z-1}{z}$ a $z = 0$ kivételével reguláris, z_0 is benne van a reg. tartományban $\longrightarrow$

   $\oint_G \frac{2z-1}{z^2-z}\, dz = \oint_G \frac{2z-1}{z(z-1)}\, dz = \oint_G \frac{\frac{2z-1}{z}}{z-1}\, dz \xrightarrow{f(z)=\frac{2z-1}{z},\ z_0=1} = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i$

   b) $\oint_G \frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{z^2+1}\, dz$; G a $|z-i| = 1$ egyenletű kör,

   $\oint_G \frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{z^2+1}\, dz = \oint_G \frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{(z-i)(z+i)}\, dz \overset{i\in G_{belseje}}{=} \oint_G \frac{\frac{\sin\frac{i\pi z}{2}}{z+i}}{z-i}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{\sin i^2\pi}{2i} = -\pi$

   c) $\oint_G \frac{e^z}{z^4-z^3}\, dz$; G a $|z-2| = 3$ egyenletű kör,

   $\oint_G \frac{e^z}{z^4-z^3}\, dz = \oint_G \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz \rightarrow$ se $z = 0$, se $z = 1$ esetén nem értelmezhető f, viszont benne vannak a G kör belsejében.
   Használjuk a következő tételt: ha $G_1, G_2, ..., G_n$ görbék a G görbe belsejében fekszenek, de kölcsönösen egymás külsejében, akkor

   $$\oint_G f = \oint_{G_1} f + \oint_{G_2} f + ... + \oint_{G_n} f$$

   Vegyük fel pl. a $|z| = \frac{1}{4}$ és $|z-1| = \frac{1}{4}$ köröket (bármilyen $r < \frac{1}{2}$ sugarú kört vehetünk), mint G_1 és G_2 és bontsuk fel:
   $\oint_G \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz = \oint_{G_1} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz + \oint_{G_2} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz$

   $\oint_{G_1} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz = \oint_{G_1} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(\left(\frac{e^z}{z-1} \right)'' \right)_{z=0} = -5\pi i$
   Itt $z_0 = 0$, ami benne van a 0 körüli körben, és $f(z)$ értelmezve van a

0 helyen és reguláris is a körön belül mindenhol, ezért használhattuk a formulát. Hasonlóan a másiknál:

$\oint_{G_2} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{G_2} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1}\,dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z^3}\right)_{z=1} = 2\pi e i$

$\longrightarrow \boxed{\oint_G \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = 2\pi e i - 5\pi i}$

d) $\oint_G \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\,dz$; G a $|z-i| = \frac{3}{2}$ egyenletű kör,

$\oint_G \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\,dz = \oint_G \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz = \oint_G \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left(\left(\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\right)'\right)_{z=i} =$
$\frac{-\pi+\pi^2 i}{2} = \frac{\pi(i\pi-1)}{2}$

e) $\oint_G \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^3}\,dz$; G az $|z-1|+|z+1| = 4$ egyenletű ellipszis,

$\frac{\pi i}{2}$ benne van az ellipszisben, egyszerű behelyettesítéssel tudjuk ellenőrizni, ezért tudjuk használni a Cauchy-formulát.
$\oint_G \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot ((\sin z)'')_{z=\frac{i\pi}{2}} = i\pi(-\sin\frac{\pi i}{2})(= \pi \sinh\frac{\pi}{2})$

f) $\oint_G \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz$; G az $\left\{\frac{i-1}{2}, \frac{-i+1}{2}\right\}$ csúcspontú háromszög,

A $z^3-1=0$ gyökei közül csak az 1 van benne a háromszögben:
$\oint_G \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz = \oint_G \frac{\frac{e^{2z}}{z^2+z+1}}{z-1}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{e^2}{3}$