5. Feladatsor

Sorozatok II. - Megoldások

1. Feladat: Konvergensek-e az alábbi komplex számsorozatok? Ha konvergensek, akkor számítsuk ki a határértékeiket.

$$a)\ z_n = \frac{n^2 - i(n^2-1)}{n^2 - i}$$
$$b)\ z_n = \sqrt{n+1} - i\sqrt{n}$$
$$c)\ z_n = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n$$

Megoldás:
$z_n = a_n + ib_n$ alakban felírható komplex számsorozat konvergens, ha a_n és b_n valós számsorozatok konvergensek és határértéke $z = a + ib$.

a) $z_n = \frac{n^2-i(n^2-1)}{n^2-i} = \frac{n^4+n^2-1}{n^4+1} + i \cdot \frac{-n^4+2n^2}{n^4+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 + (-1)i$

b) Divergens, mivel a valós rész határértéke ∞, a képzetes rész pedig a $-\infty$-hez tart, ezért nem létezik a komplex határérték.

c) Alkalmazhatjuk a Moivre-képletet, mely szerint: $(\cos x + i\sin x)^n = (\cos nx + i\sin nx)^n \longrightarrow \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

2. Feladat: Vizsgáljuk meg az alábbi valós számsorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. Adjuk meg - ha léteznek - a sorozatok határértékét, infimumát és szuprémumát.

$$a)\ a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$$
$$b)\ a_n = \frac{3n}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$c)\ a_n = \frac{n^2+1}{n(n+1)}$$

Megoldás:
a) $a_{n+1} = \frac{2n+1}{3n+4} > \frac{2n-1}{3n+1} = a_n \longleftrightarrow 6n^2 + 5n + 1 > 6n^2 + 5n - 4$. Ez utóbbi egyenlőtlenség minden $n(\in N^+)$-re teljesül, ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő. Mivel konvergens, ezért a sup a határérték, az inf a sorozat első (legkisebb) eleme.
$\sup(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}} = \frac{2}{3}$; $\inf(a_n) = a_1 = \frac{1}{4}$

kovacskd@math.bme.hu

b) Hasonlóan ellenőrizve, mint az a) feladatban, a sorozat szigorúan monoton növekvő.
$\sup(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 3;\quad \inf(a_n) = a_1 = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$

c)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)} = \begin{cases} > 0, & \text{ha } n > 2; \\ = 0, & \text{ha } n = 2; \\ < 0, & \text{ha } n < 2. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy $a_1 > a_2 = a_3$, és a harmadik elemtől a sorozat kezdve szigorúan monoton nő.
$\sup(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = 1;\ \inf(a_n) = a_2 = a_3 = \frac{5}{6}$

3. Feladat: Döntsük el, hogy az alábbi valós számsorozatok konvergensek vagy divergensek. Ha konvergensek, akkor határozzuk meg a határértéküket; ha divergensek, akkor nézzük meg, divergálnak-e végtelenhez, illetve mínusz végtelenhez.

$$a)\ a_n = \frac{1000n^3 + 20n^2}{0.001n^4 + 100n^2}$$

$$b)\ a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^5$$

$$c)\ a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 1}}{n+1}$$

Megoldás:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1000}{n} + \frac{20}{n^2}}{0.001 + \frac{100}{n^2}} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^5 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^5 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt[3]{1+0+0}}{1+0} = 1$