

## 4. Feladatsor

### Megoldások

1. Feladat: Vizsgáljuk meg, hogy harmonikusak-e az alábbi függvények az értelmezési tartományukon!

$$a) u_1 = e^{x^2-y^2} \quad b) u_2 = x^2 + 2x - y^2 \quad c) u_3 = \ln(x^2 + y^2)$$

*Megoldás:*

$$\text{harmonikus } u \iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$a) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 2e^{x^2-y^2}(2x^2+1), \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 2e^{x^2-y^2}(2y^2+1) \rightarrow u_1 \text{ nem harm.}$$

$$b) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -2 \rightarrow u_2 \text{ harmonikus}$$

$$c) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = -2 \cdot \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \rightarrow u_3 \text{ harmonikus}$$

2. Feladat: Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi kétváltozós valós függvények lehetnek-e valamely  $f$  komplex függvény valós vagy valamely  $g$  komplex függvény képzetes részei; ha igen, akkor határozzuk meg  $f$ , illetve  $g$  deriváltját!

$$a) u_1 = 3(x^2 - y^2) + 2y + 1 \quad b) u_2 = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

*Megoldás:*

Ha  $u$  harmonikus, akkor lehet valamely  $f$  komplex függvény valós vagy valamely  $g$  komplex függvény képzetes része. A függvény deriváltja csak  $u$  használatával is felírható, ha  $f$  reguláris:  $f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ . Ha  $u$  a

képzetes része a függvénynek, akkor  $u = v$ :  $g' = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$

$$a) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 6, \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -6 \rightarrow u_1 \text{ harmonikus}$$

$$f'_1(z) = 6x + i(6y - 2) = 6z - 2i, g'_1(z) = 2 - 6y + i6x = 6iz + 2$$

$$b) u_2 \text{ harm.}, f'_2(z) = \frac{y^2 - x^2 + i2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{z^2}, g'_2(z) = \frac{-2xy + i(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{i}{z^2}$$

3. Feladat: Határozzuk meg azt az  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $z = x + iy$ ) komplex függvényt, amely az értelmezési tartományán reguláris, a  $z_0$  pontban a megadott  $w_0 = f(z_0)$  értéket veszi fel, és amelynek az  $u$  valós vagy a  $v$  képzetes része a megadott kétváltozós valós függvény:

$$a) u_1 = x^3 - 3xy^2, \quad f_1(i + 1) = 2i$$

$$b) v_2 = xy, \quad f_2(i - 1) = -i$$

*Megoldás:*

Az előző feladatokhoz hasonlóan meg tudjuk adni  $f$  deriváltját, azt integráljuk, és a  $c$  konstans értékét a  $w_0 = f(z_0)$  alapján számoljuk ki.

$$a) f'_1 = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3z^2 \rightarrow \int f'_1 = z^3 + ic \rightarrow (1 + i)^3 + c = 2i \rightarrow c = -2i$$

$$b) f'_2 = x + yi = z \rightarrow \int f'_2 = \frac{z^2}{2} + c \rightarrow \frac{(1-i)^2}{2} + c = -i \rightarrow c = 0$$

4. Feladat: Számítsuk ki az alábbi  $f$  komplex függvények integrálját az adott irányított  $G$  görbe mentén!

$$a) f_1(z) = \operatorname{Re}(z), \quad G \text{ a } 0 \text{ kezdőpontú, } 1 + i \text{ végpontú szakasz}$$

$$b) f_2(z) = |z|\bar{z}, \quad G \text{ valós síkbeli, } 0 \text{ kp-ú, } 1 \text{ sugarú félkör pozitív forgásiránnyal,}$$

$$c) f_3(z) = \frac{z+2}{z}, \quad G \text{ körív pozitív forgásiránnyal, amelyre } |z| = 2, \operatorname{Im}(z) \leq 0$$

$$d) f_4(z) = e^z, \quad G \text{ valós tengely alatti, } 0 \text{ kp-ú, } 2 \text{ sugarú félkör pozitív forgásiránnyal.}$$

*Megoldás:*

$$a) G \text{ egy paraméteres egyenlete: } z(t) = t(1 + i), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$f(z) \text{ folytonos a komplex számsíkon, ezért } \int_G \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 \operatorname{Re} z(t) z'(t) \, dt =$$

$$\int_0^1 t(1 + i) \, dt = (1 + i) \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1+i}{2}$$

$$b) G \text{ egy paraméteres egyenlete: } z(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\int_G |z| \bar{z} \, dz = \int_0^\pi e^{-it} \cdot e^{it} \cdot i \, dt = i \left[ t \right]_0^\pi = i\pi$$

$$c) G \text{ egy paraméteres egyenlete: } z(t) = 2e^{it}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_G \frac{z+2}{z} \, dz = \int_\pi^{2\pi} \frac{2e^{it}+2}{2e^{it}} 2ie^{it} \, dt = 4 + 2\pi i$$

$$d) G \text{ egy paraméteres egyenlete: } z(t) = 2e^{it}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$1. \text{ mo: } \int_G e^z \, dz = \int_\pi^{2\pi} e^{2e^{it}} 2ie^{it} \, dt = \left[ e^{2e^{it}} \right]_\pi^{2\pi} = e^{2e^{i2\pi}} - e^{2e^{i\pi}} = e^2 - e^{-2}$$

2. mo: mivel  $f(z)$  reguláris függvény, ezért a kezdő- és végpont között tetszőleges görbén integrálva ugyanazt az eredményt kapjuk, ezért válasszuk ki pl. a  $z(t) = t$  ( $-2 \leq t \leq 2$ ) görbét, mert azzal egyszerűbb a számolás:

$$\int_G e^z \, dz = \int_{-2}^2 e^t \, dt = e^2 - e^{-2}$$

3. mo:  $e^z$  primitív függvényét ismerjük (önmaga), ezért használhatjuk a Newton-Leibniz formulát:  $\int_G e^z \, dz = e^2 - e^{-2}$