

4. Feladatsor

Sorozatok - Megoldások

1. Feladat: A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy az a_n sorozat a -hoz konvergál, azaz minden pozitív ϵ -hoz adjunk meg egy n_0 küszöbszámot. Hányadik elemtől (n_1) kezdve esnek a sorozat elemei az a szám r sugarú teljes környezetébe?

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+1}, \quad a = 1, \quad r = 10^{-2}$$

Megoldás:

A definíció: minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik egy n_0 küszöbszám, hogy minden $n > n_0$ esetén $|a_n - a| < \epsilon$.

$|\frac{2n-1}{2n+1} - 1| = |\frac{-2}{2n+1}| < \epsilon$, mivel $n > 0$, ezért $|\frac{-2}{2n+1}| = \frac{2}{2n+1} \rightarrow 2 <$

$\epsilon \cdot (2n+1) \rightarrow \frac{2}{\epsilon} < 2n+1 \rightarrow \boxed{\frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{2} < n}$ (ez megadja minden ϵ esetén a küszöbszámot)

Ha $\epsilon = 10^{-2}$, akkor $n_0 = \frac{2}{10^{-2}} - \frac{1}{2} = 99.5$, tehát $n = 100$ -tól az a_n elemei mind a határérték ϵ sugarú környezetébe esnek.

2. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozat a végtelenhez divergál. Milyen n_1 indextől kezdve lesznek a sorozat elemei nagyobbak az adott k pozitív számnál?

$$a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1}, \quad k = 10$$

Megoldás:

$a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} \cdot \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}-1} = \frac{(n-1)(\sqrt{n}-1)}{n-1} = \sqrt{n} - 1$, mivel a \sqrt{x} egy szigorúan monoton növekvő függvény, ezért ha $n \rightarrow \infty$ akkor $a_n \rightarrow \infty$, tehát divergens a függvény.

$\sqrt{n} - 1 > k = 10 \rightarrow \sqrt{n} > 11 \rightarrow n > 121$. Tehát $n_1 = 122$ indextől kezdve lesznek a sorozat elemei nagyobbak a $k = 10$ -nél.

3. Feladat: Vizsgáljuk meg, hogy a következő sorozatoknak van-e határértékük vagy torlódási helyeik. Mely sorozatok divergálnak végtelenhez illetve mínusz végtelenhez?

$$a) a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} \right)^n$$

$$b) a_n = \frac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}}$$

Megoldás:

a) 1. megoldás: Tudjuk, hogy q^n akkor lesz konvergens, ha $|q| < 1$, különben divergens. Ezért csak a törtet vizsgáljuk meg:

$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$, és mivel $n > 0$, ezért $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, tehát a tört értéke nagyobb lesz, mint 1 \implies az a_n sorozat divergens és tart a ∞ -hez. Mivel a sorozat szig. mon. növekvő, ezért nem lesz torlódási helye sem.

2. megoldás: Bernoulli-egyenlőtlenség alapján: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \sqrt{n}$. Mivel már a jobb oldal is a ∞ -hez tart, ezért az ennél nagyobb sorozat is.

b) $\frac{2^{n+1}}{3^n + 4^{n-1}} = \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{4}2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (mivel a nevező tart a ∞ -hez, ezért a tört a 0-hoz tart)