

3. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a z ismeretlenre a komplex számok halmazán!

$$a) \sin z = 0 \quad b) e^{-z} + 1 = 0 \quad c) \cos z = -2$$

Megoldás:

a) $\sin z = 0 \rightarrow$ Euler-formula: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \xrightarrow{\cdot e^{iz}} e^{2iz} = 1 \xrightarrow{1=e^{i \cdot 2k\pi}} 2iz = i \cdot 2k\pi \rightarrow z = k\pi \quad (k \in \mathbb{R})$
 $1 = e^{i \cdot 2k\pi}$, mivel az e^{iz} komplex egységkörön vagyunk, $z = 0$ esetén vagyunk az $1-0i$ pontban (a kör "kezdőpontjában"), innen bárhányszor ($k \in \mathbb{R}$) körbeme gyünk a teljes körön (2π -vel növeljük z -t), visszajutunk ugyanabba a pontba.

Másképp: $1 = 1 + i \cdot 0 \rightarrow \cos(?) = 1$ és $\sin(?) = 0 \rightarrow \cos(0 + 2k\pi) = 1$ és $\sin(0 + 2k\pi) = 0 \rightarrow \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = e^{i2k\pi}$

b) $e^{-z} + 1 = 0 \rightarrow e^{-z} = -1 \rightarrow -z = \ln(-1) = i(\pi + 2k\pi) \rightarrow z = -i\pi(1 + 2k)$

c) $\cos z = -2 \rightarrow$ Euler-f.: $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -2 \rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = -4 \xrightarrow{e^{iz}=w} w + \frac{1}{w} = -4 \xrightarrow{\cdot w} w^2 + 1 = -4w \rightarrow w^2 + 4w + 1 = 0 \xrightarrow{\text{másodfokú megoldóképlet}} w = e^{iz} = -2 \pm \sqrt{3} \rightarrow z = -i \cdot \ln(2 \pm \sqrt{3}) + \pi(2k + 1)$

2. Feladat: Vizsgáljuk meg differenciálhatóság, illetve regularitás szempontjából az alábbi komplex függvényeket!

$$a) y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) \quad b) \cos \bar{z} \quad c) |z|\bar{z} \quad d) z \cdot \operatorname{Re} z$$

Megoldás:

Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenlet-rendszerrel ellenőrizzük, hogy diffható-e, és ha mindenhol diffható, akkor reguláris. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

a) mindenhol differenciálható, ezért reguláris

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, de $\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$, csak ha $z = k\pi \rightarrow$ csak ezekben a pontokban diffható, tehát sehol sem reguláris.

c) Nem teljesülnek a C-R egyenletek, de $z = 0$ -ban nincsenek értelmezve, így $z = 0$ -ban a definíció alapján nézzük meg a diffhatóságot: $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|\bar{z}}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{-2\phi i} = 0$, tehát 0 -ban diffható (de sehol sem reguláris).

d) Csak a $z = 0$ esetén teljesülnek a C-R egyenletek, ezért csak ott diffrható a függvény (és sehol sem reguláris).

3. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy a következő függvények az értelmezési tartományukon regulárisak, majd adjuk meg a függvények deriváltját.

$$f_1 = e^{cz} \quad c \in R \qquad f_2 = \ln z \qquad f_3 = \sin z$$

$$f_4 = \frac{z \cdot \cos z}{1 + z^2} \qquad f_5 = \frac{e^z}{z} \qquad f_6 = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

Megoldás:

Reguláris \longleftrightarrow mindenhol diffrható, tehát a C-R egyenleteket ellenőrizzük

itt is. A függvény deriváltja: $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$

$$f'_1 = c \cdot e^{cz} \qquad f'_2 = \frac{1}{z} \qquad f'_3 = \cos z$$

$f'_4 = \frac{(1-z^2) \cos z - z(1+z^2) \sin z}{(1+z^2)^2}$ (kivéve a $-i$ és i pontokban, mert ott nincs értelmezve a függvény és így nem is reguláris)

$f'_5 = \frac{e^z(z-1)}{z^2}$ (a 0 -ban nincs értelmezve a függvény, így ott nem is reguláris)

$f'_6 = \frac{2e^z}{(e^z-1)^2}$ ($2k\pi i$, $k \in R$ pontok kivételével)