

### 3. Feladatsor

#### Térgeometria - Megoldások

1. Feladat: Írjuk fel az alábbiak alapján meghatározott egyenesek paraméteres és paramétermentes egyenletrendszeit!
- a) Átmegy a  $P(3,1,2)$  és a  $Q(-1,1,3)$  pontokon.
- b) Merőleges az  $a = [-2,3,1]$  és a  $b = [2,0,1]$  vektorokra, és átmegy az  $A(6,-3,4)$  ponton.
- c) Párhuzamos a  $3x + y - z + 1 = 0$  és az  $x + y + z = 0$  egyenletű síkkal, és metszi az  $yz$  tengelysíkot a  $P(0,4,1)$  pontban.

*Megoldás:*

a) Az egyenes irányvektorának vehetjük a P-ből Q-ba mutató vektort (ez párhuzamos lesz az egyenessel), amit egyszerűen fel tudunk írni úgy, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit:  $\vec{PQ} = (-1 - 3, 1 - 1, 3 - 2) = (-4, 0, 1)$ . Válasszunk egyet P és Q közül, és segítségével írjuk fel az egyenletrendszert (itt P-t választottuk):

$x = 3 - 4t; y = 1; z = 2 + t$  ( $t \in R$ ), nemparaméteresen:  $\frac{x-3}{-4} = \frac{z-2}{1}; y = 1$

b) Merőleges a két vektorra  $\iff$  az egyenes irányvektora a két vektor vektoriális szorzata  $\rightarrow \underline{v} = (3, 4, -6)$

$x = 6 + 3t; y = -3 + 4t; z = 4 - 6t$  ( $t \in R$ ), nemparaméteresen:  $\frac{x-6}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{-6}$

c) Az irányvektor a két sík normálvektorainak vektoriális szorzata  $\rightarrow \underline{v} = (3, 1, -1) \times (1, 1, 1) = (2, -4, 2)$

$x = 2t; y = 4 - 4t; z = 1 + 2t$  ( $t \in R$ ), nemparaméteresen:  $\frac{x-0}{2} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-1}{2}$

2. Feladat: A következőkben megadott pontok egy síkban vannak?

a)  $A(2, -1, 4), B(-1, 0, 3), C(3, -1, 0), D(1, 1, 2)$

b)  $A(1, -9, -12), B(2, -7, -13), C(0, -11, -11), D(3, -5, -14)$

*Megoldás:*

Akkor vannak egy síkban, ha a pontok közötti 3 vektor vegyes szorzata 0.

a)  $\vec{AB} = (-3, 1, -1); \vec{BC} = (4, -1, -3); \vec{CD} = (-2, 2, 2) \rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{CD} = -20 \neq 0$  tehát nem egy síkban van a 4 pont.

b)  $\vec{AB} = (1, 2, -1); \vec{BC} = (-2, -4, 2); \vec{CD} = (3, 6, -3) \rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} \cdot \vec{CD} = 0$  tehát egy síkban vannak.

3. Feladat: Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az  $A(1,5,2)$  ponton és párhuzamos a  $7x - y + 3z + 2 = 0$  egyenletű síkkal!

*Megoldás:*

Párhuzamos a síkkal  $\iff$  ugyanaz a normálvektoruk:  $\underline{n} = (7, -1, 3)$

A sík egyenlete:  $7(x-1) - 1(y-5) + 3(z-2) = 0 \iff 7x - y + 3z - 8 = 0$

4. Feladat: Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az  $x - y - 4z - 5 = 0$  és a  $2x + y - 2z - 4 = 0$  egyenletű síkok metszésvonalával és átmegy az origón!

*Megoldás:*

A metszésvonalukkal párhuzamos, azaz mind a két síkkal párhuzamos

$\rightarrow$  az irányvektora a két sík normálvektorának vektoriális szorzata:  $\underline{v} = (1, -1, -4) \times (2, 1, -2) = (6, -6, 3)$  (vehetjük helyette az ugyanilyen irányú  $(2, -2, 1)$  vektort)  $\rightarrow x = 2t; y = -2t; z = t \quad (t \in \mathbb{R}); \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z-0}{1}$

5. Feladat: Tükrözzük az  $x = 1 - 2t, y = 3 + 2t, z = -4 - 9t$  egyenletrendszerű  $e$  egyenest a  $3x + y - 2z = 0$  egyenletű síkon!

*Megoldás:*

Az egyenes tükörképének felírásához kell egy irányvektor (ami az eredeti irányvektor tükörképe a síkra) és egy pont. Az utóbbi lehet a sík és az egyenes metszéspontja (ha van, mert annak tükörképe önmaga), vagy egy random pontot is tükrözhetünk - mi az utóbbit fogjuk most használni.

Az eredeti egyenes egy pontja  $P = (1, 3, -4)$ , irányvektora  $\underline{v} = (-2, 2, -9)$ , a sík normálvektora  $\underline{n} = (3, 1, -2)$ .

Irányvektor tükrözése a síkra:  $\underline{v}' = \underline{v} - 2 \cdot \frac{\underline{v} \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|^2} \cdot \underline{n} = (-8, 0, -5)$

Pont tükrözése:  $P' = P - 2 \cdot \frac{3x_0 + y_0 - 2z_0}{|\underline{n}|^2} \cdot \underline{n} = (-5, 1, 0) \rightarrow$

A tükrözött egyenes:  $x = -5 - 8t; y = 1; z = -5t$ .