2. Feladatsor

Vektorok - Megoldások

1. Feladat: Legyen az {a, b, c} vektorrendszer lineárisan független. Döntsük el, hogy az {r, s, t} vektorrendszer lineárisan független-e! Állításainkat igazoljuk!

$$\begin{array}{llll} a) & r = 3a + 2b + c & s = 5a – 3b - 2c & t = 0, \\ b) & r = 3a - b - c & s = 2a + b + 2c & t = a - 2b - 3c, \\ c) & r = a + b + c & s = -a + c & t = a - b + c, \end{array}$$

Megoldás:
a) A vektorrendszer nem lineárisan független, mivel $t = 0$ (a zéróvektor), a három vektor között azonnal fennáll egy nemtriviális lineáris kombináció:

$$0 \cdot r + 0 \cdot s + 1 \cdot t = 0.$$

Ez nem a triviális ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) megoldás, tehát a $\{r, s, t\}$ vektorrendszer lineárisan függő.

b) A vektorrendszer lineárisan függő, mivel $t = r - s$.

c) A vektorrendszer lineárisan független, mivel ha

$$\alpha r + \beta s + \gamma t = 0,$$

akkor

$$\alpha(a+b+c)+\beta(-a+c)+\gamma(a-b+c) = (\alpha-\beta+\gamma)a+(\alpha-\gamma)b+(\alpha+\beta+\gamma)c = 0.$$

Mivel a, b, c függetlenek, ezért

$$\alpha - \beta + \gamma = 0, \quad \alpha - \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Egyenletrendszer megoldása $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tehát csak a triviális kombináció adja a nullvektort.

2. Feladat: Az a, b, c és v vektorokat (az {i,j,k} alapvektorrendszerre vonatkoztatott) koordinátáikkal adtuk meg. Fejezzük ki a v vektort az a, b és c vektorok lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!

$$a = [1, 0, 0], \quad b = [0, 1, 0], \quad c = [1, 1, 0], \quad v = [2, 1, 3]$$

Megoldás:
Mivel v 3. koordinátája 3, viszont a, b és c 3. koordinátái mind 0, ezért nem állítható elő v a lineáris kombinációjukként.

kovacskd@math.bme.hu

3. Feladat: Az a és b vektorok szöge $\frac{\pi}{3}$, abszolút értékük: $|a| = 3$ és $|b| = 4$. Számítsuk ki az alábbi skaláris szorzatok értékét!

$$a)\ ab \quad b)\ a^2 \quad c)\ (a+b)^2 \quad d)\ (3a-2b)^2$$

Megoldás:
a) $ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos szög_{ab} = 3 \cdot 4 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$

b) $a^2 = |a| \cdot |a| \cdot \cos szög_{aa} = 3 \cdot 3 \cdot \cos 0 = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$

c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 9 + 2 \cdot 6 + |b| \cdot |b| \cdot \cos 0 = 9 + 12 + 4 \cdot 4 \cdot 1 = 37$
Azért bonthattuk így ki a négyzetre emelt összeget, mivel a skaláris szorzás kommutatív és a vektorösszeadásra nézve disztributív.

d) $(3a-2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2 = 9 \cdot 9 - 12 \cdot 6 + 4 \cdot 16 = 73$

4. Feladat: Végezzük el az alábbi vektori szorzásokat, majd hozzuk egyszerűbb alakra az így kapott kifejezéseket!

$$a)\ (a+b) \times (a-b) \quad b)\ (a+b-c) \times (a+b+c) \quad c)\ (3a-b) \times (b+3a)$$

Megoldás:
a) $(a+b) \times (a-b) = a \times (a-b) + b \times (a-b) = a \times a - a \times b + b \times a - b \times b = a \times a - 2(a \times b) + b \times b = -2(a \times b)$
$a \times a$ és $b \times b = 0$, mivel a szögük $0°$, aminek a szinusza 0.

b) $(a+b-c) \times (a+b+c) = 2(a \times c) + 2(b \times c)$

c) $(3a-b) \times (3a+b) = 6(a \times b)$

5. Feladat: Az a, b, c vektorrendszer az α paraméter mely értékeinél lineárisan független, és mely értékeinél lineárisan függő?

$$a)\ a = [\alpha, 1, 2], b = [3, -1, 0], c = [2, 1, 0]$$
$$b)\ a = [3, \alpha, 0], b = [0, 3, \alpha], c = [1, 0, -1]$$

Megoldás:

Akkor lesz lineárisan függő a vektorrendszer, ha a 3 vektor vegyes szorzata 0 (ugyanis ez azt jelenti, hogy egy síkba esnek).

a) A vegyes szorzat kiszámításánál kiesik az α-t tartalmazó tag, és mivel a vegyes szorzat értéke $10 \neq 0$, ezért minden α-ra független lesz a vektorrendszer.

b) Ha $\alpha = -3$ vagy $\alpha = 3$, akkor a vegyes szorzat értéke 0, ezért függő lesz a vektorrendszer, minden más α-ra független.