1. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Az alábbi $z = x + iy$ komplex számokra adjuk meg $Re(z)$, $Im(z)$, $\bar{z}$, $|z|$, $\frac{1}{z}$ értékeit!

$$z_1 = 5 + 2i \quad z_2 = 4 - i \quad z_3 = 3i \quad z_4 = 3 - 5i$$

*: Mit jelent geometriailag z abszolút értéke?

Megoldás:

$$Re(z_1) = 5 \quad Im(z_1) = 2 \quad \overline{z_1} = 5 - 2i \quad |z_1| = \sqrt{19} \quad \frac{1}{z_1} = \frac{5}{19} - \frac{2}{19}i$$
$$Re(z_2) = 4 \quad Im(z_2) = -1 \quad \overline{z_2} = 4 + i \quad |z_2| = \sqrt{17} \quad \frac{1}{z_2} = \frac{4}{17} + \frac{1}{17}i$$
$$Re(z_3) = 0 \quad Im(z_3) = 3 \quad \overline{z_3} = -3i \quad |z_3| = 3 \quad \frac{1}{z_3} = -\frac{1}{3}i$$
$$Re(z_4) = 3 \quad Im(z_4) = -5 \quad \overline{z_4} = 3 + 5i \quad |z_4| = \sqrt{34} \quad \frac{1}{z_4} = \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$$

*: z abszolút értéke a komplex számsíkban ábrázolva a vektor hossza

2. Feladat: Számoljuk ki az alábbi kifejezéseket, ahol

   (a) $z_1 = 3 + 4i$ és $z_2 = 1 - 2i$

   (b) $z_1 = 4i$ és $z_2 = 5 - i$

$$z_1 + z_2, \overline{z_1 + z_2}, z_1 - z_2$$
$$z_1 \cdot z_2, \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, |z_1 \cdot z_2|, \frac{z_1}{z_2}$$

Megoldás:
a) rész:

$$z_1 + z_2 = 4 + 2i \quad \overline{z_1 + z_2} = 4 - 2i \quad z_1 - z_2 = 2 + 6i$$
$$z_1 \cdot z_2 = 11 - 2i \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = 11 + 2i \quad |z_1 \cdot z_2| = 5\sqrt{5} \quad \frac{z_1}{z_2} = -1 + 2i$$

b) rész:

$$z_1 + z_2 = 5 + 3i \quad \overline{z_1 + z_2} = 5 - 3i \quad z_1 - z_2 = -5 + 5i$$
$$z_1 \cdot z_2 = 4 + 20i \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = 4 - 20i \quad |z_1 \cdot z_2| = 4\sqrt{26} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{13} + \frac{10}{13}i$$

3. Feladat: Írjuk át az alábbi számokat trigonometriai alakba!

$$z_1 = 5 + 5i \quad z_2 = 2\sqrt{3} - 2i \quad z_3 = -i$$

*: Ábrázoljuk a számokat a komplex számegyenesen!

Megoldás:

Megoldás menete: kiszámoljuk az r értékét, ami z abszolút értéke ($r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$), kiemeljük a z valós és képzetes részéből ($z = r \cdot (\frac{x}{r} + i \cdot \frac{y}{r})$), majd kiszámoljuk $\arccos(\frac{x}{r})$ *és* $\arcsin(\frac{y}{r})$ alapján a közös szöget.

$$z_1 = 5 + 5i = 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \cdot \sin 45°)$$
$$z_2 = 2\sqrt{3} - 2i = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot (\cos 330° + i \cdot \sin 330°)$$
$$z_3 = -i = 1 \cdot (0 - 1 \cdot i) = 1 \cdot (\cos 270° + i \cdot \sin 270°)$$

4. Feladat: Írjuk át algebrai alakba az alábbi komplex számokat!

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right)$$
$$z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6}\right)$$

Megoldás:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$
$$z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -3 - \sqrt{3}i$$

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket és adjuk meg a megoldást algebrai alakban!

$$a) \quad |z| + z = 5 + i,$$
$$b) \quad iz^2 + (2 - 4i)z - 4 - i = 0$$

Megoldás:

a) $|z| + z = \sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 5 + i \longrightarrow$ a valós és a képzetes részeket külön kezeljük:

képzetes: $iy = i \longrightarrow y = 1$

valós: $\sqrt{x^2 + y^2} + x = 5 \to \sqrt{x^2 + y^2} = 5 - x \to x^2 + y^2 = (5 - x)^2 = 25 - 10x + x^2$ $x^2 + 1^2 = 25 - 10x + x^2 \longrightarrow 10x = 24 \to x = 2.4$

b) másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján: $z_1 = i,\ z_2 = 4 + i$

6. Adjuk meg az alábbi kifejezések értékét algebrai alakban!

$$a)\ (1+i)^{12} \qquad b)\ (1-i)^{-3}$$

Megoldás:
Átváltjuk a számot trigonometriai alakba, amiben könnyű elvégezni a hatványra emelést.

a) $(1+i)^{12} = (\sqrt{2}\cdot(\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ))^{12} = \sqrt{2}^{12}(\cos(12\cdot 45^\circ) + i\cdot\sin(12\cdot 45^\circ)) = 64\cdot(\cos 540^\circ + i\cdot\sin 540^\circ) = 64\cdot(1+i\cdot 0) = 64$

b) $(1-i)^{-3} = (\sqrt{2}\cdot(\cos -45^\circ + i\cdot\sin -45^\circ))^{-3} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$