2. Feladatsor

Megoldások

1. Feladat: Adjuk meg azokat az u és v függvényeket, amelyekkel az alábbi f komplex függvények $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ alakban írhatóak!

$$f_1 = z^2 + \frac{1}{z} \quad f_2 = e^{-z}$$

Megoldás:

$a)\quad u_1 = x^2 - y^2 + \dfrac{x}{x^2+y^2} \qquad v_1 = 2xy - \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$b)\quad e^{-z} = e^{-x} \cdot e^{-iy} = e^{-x} \cdot (cos(-y) + i \cdot sin(-y)) = e^{-x}cosy - i \cdot e^{-x}siny$

$$azaz \quad u_2 = e^{-x}cosy \qquad v_2 = e^{-x}siny$$

2. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha $x, y \in R$, akkor:

$$sin(x+iy) = sin(x)cosh(y) + i \cdot cos(x)sinh(y)$$

$$cos(x+iy) = cos(x)cosh(y) - i \cdot sin(x)sinh(y)$$

Megoldás:
Legyen $z = x + iy$, ahol $x, y \in R$. Emlékeztetőül az exponenciális alakok:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

valamint

$$\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}, \qquad \sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}.$$

A szinusz esetén:

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i}.$$

Mivel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ és $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, ezért:

kovacskd@math.bme.hu

$$\begin{aligned} \text{számláló} &= e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x) \\ &= (e^{-y} - e^{y})\cos x + i(e^{-y} + e^{y})\sin x \\ &= -2\sinh(y)\cos x + i\cdot 2\cosh(y)\sin x. \end{aligned}$$

Ezért:

$$\sin(x+iy) = \frac{-2\sinh(y)\cos x}{2i} + \frac{i\cdot 2\cosh(y)\sin x}{2i} = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y.$$

A koszinuszos esetet hasonlóan kaphatjuk meg, így igazoltuk az állításokat.

3. Feladat: A következő komplex számokat írjuk fel algebrai alakban!

$$z_1 = cos(-i) \quad z_2 = sin(3-4i) \quad z_3 = e^{1-i\cdot arcsin\frac{1}{3}}$$

Megoldás:

$z_1 = cos(-i) = ch(i(-i)) = ch(1)$
$z_2 = sin(3-4i) = sin(3)\cdot cos(4i) - cos(3)\cdot sin(4i) = sin(3)\cdot cosh(4) - i\cdot cos(3)\cdot sinh(4)$
$z_3 = \frac{e}{3}\cdot(2\sqrt{2} - i)$

4. Feladat: Számítsuk ki a következő komplex számok komplex logaritmusait. Adjuk meg a logaritmusok főértékeit:

$$z_1 = -5+5i \quad z_2 = -e$$

Megoldás:

$ln(-5+5i) = ln(5\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}) = ln(5\sqrt{2}) + i\pi(\frac{3}{4} + 2k) \quad$ a főérték : $ln(5\sqrt{2})\cdot i\frac{3\pi}{4}$
$ln(-e) = 1 + i\pi(2k+1) \quad$ a főérték : $1 + \pi i$

5. Feladat: A következő komplexhatványokat adjuk meg algebrai alakban, és határozzuk meg főértéküket:

$$z_1 = (1+i)^i \quad z_2 = (6-3i)^{2i+1} \quad z_3 = e^{5-i} \quad z_4 = (1-i)^e$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} z_1 = (1+i)^i = e^{i(\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi))} &= e^{-\pi(\frac{1}{4}+2k)}e^{i\ln\sqrt{2}} \\ = e^{-\pi(\frac{1}{4}+2k)}\cos(\ln\sqrt{2}) &+ ie^{-\pi(\frac{1}{4}+2k)}\sin(\ln\sqrt{2}) \\ \text{a főérték: } e^{-\frac{\pi}{4}}&\big(\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\big) \end{aligned}$$

$$z_2 = (6-3i)^{2i+1}: \quad \text{ha } a = \ln 45 + 2k\pi - \arctan\frac{1}{2}, b = \ln\sqrt{45} - 4k\pi + 2\arctan\frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow z_2 = e^b\big(\cos a + i\sin a\big), \quad \text{a főérték } k=0 \text{ esetből adódik}$$

$$z_3 = e^{5-i} = e^{(5-i)\ln e} = e^{(5-i)(1+2k\pi i)} = e^{5+2k\pi}\big(\cos 1 - i\sin 1\big)$$

$$\text{a főérték: } e^5(\cos 1 - i\sin 1)$$

$$z_4 = (1-i)^e = 2^{\frac{e}{2}}\big(\cos\big(e\frac{8k+7}{4}\pi\big) + \sin\big(e\frac{8k+7}{4}\pi\big)\big)$$

$$\text{a főérték: } 2^{\frac{e}{2}}\big(\cos\tfrac{e\pi}{4} + \sin\tfrac{e\pi}{4}\big)$$