1. Feladatsor

Megoldások

Komplex számok

1. Feladat: Az alábbi $z = x + iy$ komplex számokra adjuk meg $Re(z)$, $Im(z)$, $\bar{z}$, $|z|$, $\frac{1}{z}$ értékeit!

$$z_1 = 5 + 2i \quad z_2 = 4 - i \quad z_3 = 3i$$

*: Mit jelent geometriailag z abszolút értéke?

Megoldás:

$$\begin{array}{lllll} Re(z_1) = 5 & Im(z_1) = 2 & \overline{z_1} = 5 - 2i & |z_1| = \sqrt{19} & \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{5}{19} - \dfrac{2}{19}i \\ Re(z_2) = 4 & Im(z_2) = -1 & \overline{z_2} = 4 + i & |z_2| = \sqrt{17} & \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{4}{17} + \dfrac{1}{17}i \\ Re(z_3) = 0 & Im(z_3) = 3 & \overline{z_3} = -3i & |z_3| = 3 & \dfrac{1}{z_3} = -\dfrac{1}{3}i \end{array}$$

*: z abszolút értéke a komplex számsíkban ábrázolva a vektor hossza

2. Feladat: Számoljuk ki az alábbi kifejezéseket, ahol $z_1 = 3+4i$ és $z_2 = 1-2i$!

$$z_1 + z_2, \overline{z_1 + z_2}, z_1 - z_2$$

$$z_1 \cdot z_2, \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, |z_1 \cdot z_2|, \frac{z_1}{z_2}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{llll} z_1 + z_2 = 4 + 2i & \overline{z_1 + z_2} = 4 - 2i & z_1 - z_2 = 2 + 6i & \\ z_1 \cdot z_2 = 11 - 2i & \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = 11 + 2i & |z_1 \cdot z_2| = 5\sqrt{5} & \dfrac{z_1}{z_2} = -1 + 2i \end{array}$$

3. Feladat: Írjuk át az alábbi számokat trigonometriai alakba!

$$z_1 = 5 + 5i \quad z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$$

Megoldás:

$$z_1 = 5 + 5i = 5\sqrt{2} \cdot \left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sin\frac{\pi}{4} \right)$$
$$z_2 = 2\sqrt{3} - 2i = 4 \cdot \left(cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot sin\frac{11\pi}{6} \right)$$

4. Feladat: Írjuk át algebrai alakba az alábbi komplex számokat!

$$z_1 = 2 \cdot \left(cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \left(cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

Megoldás:

$$z_1 = 2 \cdot \left(cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$
$$z_2 = 2\sqrt{3} \cdot \left(cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot sin\frac{7\pi}{6}\right) = -3 - \sqrt{3}i$$

Komplex függvények

1. Feladat: Adjuk meg azokat az u és v függvényeket, amelyekkel az alábbi f komplex függvények $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ alakban írhatóak!

$$f_1 = \frac{1}{\overline{z}} \quad f_2 = z^2 + i \quad f_3 = \frac{z+1}{z-1} \quad f_4 = z\overline{z}$$

Megoldás:

$$f_1 = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} \rightarrow u_1 = \frac{x}{x^2+y^2},\ v_1 = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f_2 = z^2 + i = x^2 - y^2 + i \cdot (2xy+1) \rightarrow u_2 = x^2 - y^2,\ v_2 = 2xy + 1$$

$$f_3 = \frac{z+1}{z-1} = \frac{(x+iy+1)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} = \frac{x^2+2yi+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} \rightarrow$$
$$u_3 = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2},\ v_3 = \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$f_4 = z\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2 \rightarrow u_4 = x^2 + y^2,\ v_4 = 0$$